

第四章 数组、串与广义表

- 一维数组与多维数组
- 特殊矩阵
- 稀疏矩阵
- 字符串
- 广义表

一维数组

- 定义

数组是相同类型的数据元素的集合，而一维数组的每个数组元素是一个序对，由下标（**index**）和值（**value**）组成。

- 一维数组的示例

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
35	27	49	18	60	54	77	83	41	02

- 在高级语言中的一维数组只能按元素的下标直接存取数组元素的值。

一维数组的定义和初始化

```
#include <iostream.h>

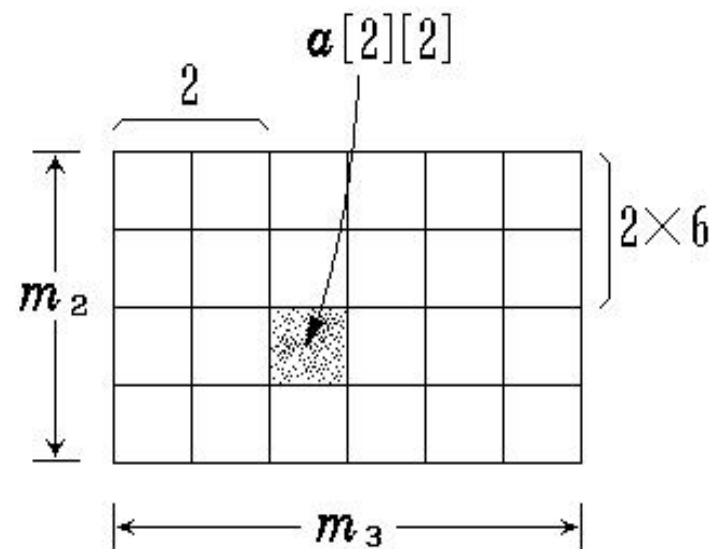
void main ( ) {
    int a[3] = { 3, 5, 7 }, *elem, i;           //静态数组
    for (i = 0; i < 3; i++)
        cout << a[i] << endl;
    elem = new int[3];                           //动态数组
    for (i = 0; i < 3; i++)
        cin >> elem[i];
    int * temp = elem;
    for (i = 0; i < 3; i++)
        { cout << *temp<< endl; temp++; }
    delete [] elem;
}
```

多维数组

- 多维数组是一维数组的推广。
- 多维数组的特点是每一个数据元素可以有多个直接前驱和多个直接后继。
- 数组元素的下标一般具有固定的下界和上界，因此它比其他复杂的非线性结构简单。
- 例如二维数组的数组元素有两个直接前驱，两个直接后继，必须有两个下标（行、列）以标识该元素的位置。

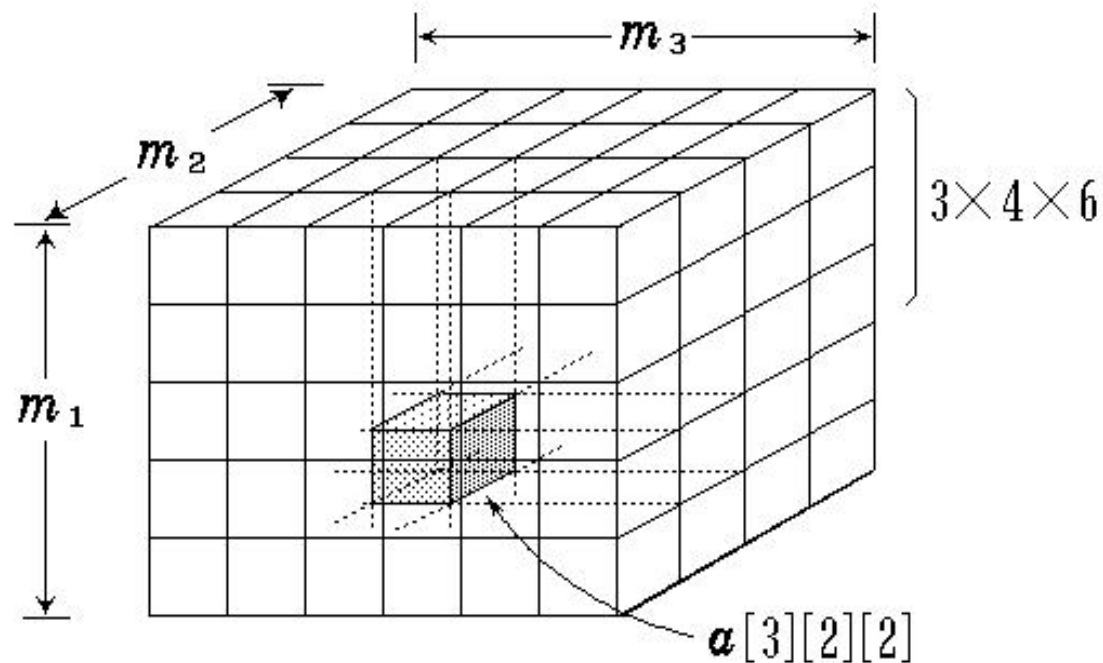
二维数组

$$m_1 = 5 \quad m_2 = 4 \quad m_3 = 6$$



行向量 下标 i
列向量 下标 j

三维数组

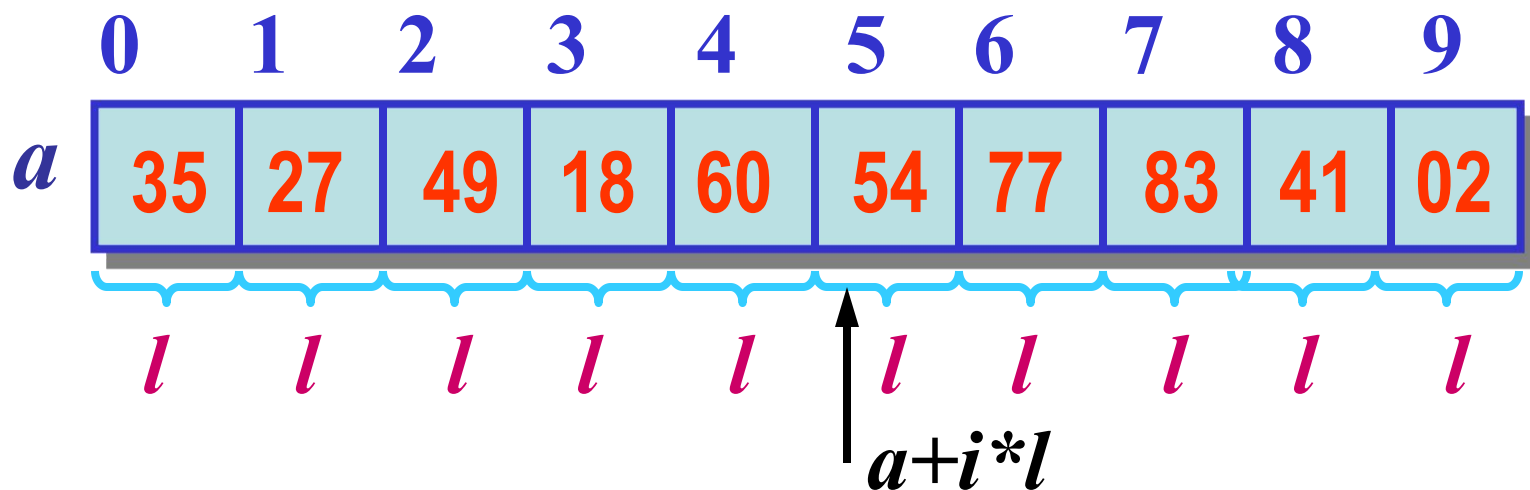


页向量 下标 i
行向量 下标 j
列向量 下标 k

数组的连续存储方式

一维数组

$$\text{LOC}(i) = \begin{cases} a, & i = 0 \\ \text{LOC}(i-1) + l = a + i * l, & i > 0 \end{cases}$$



二维数组

- 一维数组常被称为向量（Vector）。
- 二维数组 $A[m][n]$ 可看成是由 m 个行向量组成的向量，也可看成是由 n 个列向量组成的向量。
- 一个二维数组类型可以定义为其分量类型为一维数组类型的一维数组类型：

`typedef T array2[m][n];` //T为元素类型
等价于：

`typedef T array1[n];` //列向量类型
`typedef array1 array2[m];` //二维数组类型

- 同理，一个**三维数组**类型可以定义为其数据元素为二维数组类型的一维数组类型。
- **静态定义**的数组，其维数和维界不再改变，在编译时静态分配存储空间。一旦数组空间用完则不能扩充。
- **动态定义**的数组，其维界不在说明语句中显式定义，而是在程序运行中创建数组对象时通过 **new** 动态分配和初始化，在对象销毁时通过 **delete** 动态释放。
- 用**一维内存**来表示**多维数组**，就必须按某种次序将数组元素排列到一个序列中。

二维数组的动态定义和初始化

```
#include <iostream.h>
```

```
.....
```

```
int **A;
```

```
int row = 3, col = 3;  int i, j;
```

```
A = new int *[row];
```

```
for (i = 0; i < row; i++)
```

```
    A[i] = new int [col];
```

```
for (i = 0; i < row; i++)
```

```
    for (j = 0; j < col; j++)  cin >> A[i][j];
```

```
.....
```

二维数组中数组元素的顺序存放

$$a = \begin{pmatrix} a[0][0] & a[0][1] & \cdots & a[0][m-1] \\ a[1][0] & a[1][1] & \cdots & a[1][m-1] \\ a[2][0] & a[2][1] & \cdots & a[2][m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a[n-1][0] & a[n-1][1] & \cdots & a[n-1][m-1] \end{pmatrix}$$

- 行优先存放:

设数组开始存放位置 $\text{LOC}(0, 0) = a$, 每个元素占用 l 个存储单元

- $\text{LOC}(j, k) = a + (j * m + k) * l$

$$a = \begin{pmatrix} a[0][0] & a[0][1] & \cdots & a[0][m-1] \\ a[1][0] & a[1][1] & \cdots & a[1][m-1] \\ a[2][0] & a[2][1] & \cdots & a[2][m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a[n-1][0] & a[n-1][1] & \cdots & a[n-1][m-1] \end{pmatrix}$$

列优先存放：

设数组开始存放位置 $\text{LOC}(0, 0) = a$ ，每个元素占用 l 个存储单元

$$\text{LOC}(j, k) = a + (k * n + j) * l$$

三维数组

- 各维元素个数为 m_1, m_2, m_3
- 下标为 i_1, i_2, i_3 的数组元素的存储地址：
(按页 / 行 / 列存放)

$$\text{LOC}(i_1, i_2, i_3) = a + \underbrace{(i_1 * m_2 * m_3)}_{\substack{\text{前 } i_1 \text{ 页} \\ \text{总元素} \\ \text{个数}}} + \underbrace{i_2 * m_3}_{\substack{\text{第 } i_1 \text{ 页} \\ \text{前 } i_2 \text{ 行} \\ \text{总元素} \\ \text{个数}}} + \underbrace{i_3}_{\substack{\text{第 } i_2 \text{ 行} \\ \text{前 } i_3 \text{ 列} \\ \text{元素个} \\ \text{数}}} * l$$

n 维数组

- 各维元素个数为 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$
- 下标为 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ 的数组元素的存储地址:

$$\begin{aligned} \text{LOC} (i_1, i_2, \dots, i_n) &= a + \\ & (i_1 * m_2 * m_3 * \dots * m_n + i_2 * m_3 * m_4 * \dots * m_n + \\ & + \dots + i_{n-1} * m_n + i_n) * l \\ &= a + \left(\sum_{j=1}^{n-1} (i_j * \prod_{k=j+1}^n m_k) + i_n \right) * l \end{aligned}$$

1 二维数组

二维数组 `A[0..6][0..6]` 按行优先连续存储, `A[0][0]` 的地址为 4000, 每个元素占 2 字节。求 `A[1][6]` 的地址。若改为列优先, 地址是多少?

2 三维下标反推

三维数组 `B[3][4][5]` 按页、行、列顺序存储。某元素相对 `B[0][0][0]` 的线性偏移量为 47 个元素, 求其三个下标。

3 动态二维数组辨错

程序先执行 `A = new int\*[r]`, 再对每一行执行 `A[i] = new int[c]`。判断下面两句话是否正确, 并说明理由。

1. 所有 `r\*c` 个整数必定位于一整块连续内存中。
2. 释放时只需执行 `delete[] A`。

1 含非零下界的二维数组

二维数组 `A[0..6][0..6]` 按行优先连续存储, `A[0][0]` 的地址为 4000, 每个元素占 2 字节。求 `A[1][6]` 的地址。若改为列优先, 地址是多少?

答案: 数组有 4 行、5 列。

- 行优先偏移量为 `(1-0)\*7+(6-0)=13`, 地址为 `4000+13\*2=4026`。

- 列优先偏移量为 `(6-0)\*7+(1-0)=43`, 地址为 `4000+43\*2=4086`。

2 三维下标反推

三维数组 `B[3][4][5]` 按页、行、列顺序存储。某元素相对 `B[0][0][0]` 的线性偏移量为 47 个元素, 求其三个下标。

答案: 每页有 `4\*5=20` 个元素。`47=2\*20+7`, 且 `7=1\*5+2`, 所以下标为 `B[2][1][2]`。

3 动态二维数组辨错

程序先执行 `A = new int\*[r]`, 再对每一行执行 `A[i] = new int[c]`。判断下面两句话是否正确, 并说明理由。

1. 所有 `r\*c` 个整数必定位于一整块连续内存中。

2. 释放时只需执行 `delete[] A`。

答案: 两句话都不正确。各行内部连续, 但多次 `new` 得到的各行不保证彼此相邻。释放时应先对每一行执行 `delete[] A[i]`, 再执行 `delete[] A`。

特殊矩阵

- **特殊矩阵**是指非零元素或零元素的分布有一定规律的矩阵。
- 特殊矩阵的压缩存储主要是针对阶数很高的特殊矩阵。为节省存储空间，对可以不存储的元素，如零元素或对称元素，不再存储。
 - ◆ 对称矩阵
 - ◆ 三对角矩阵

对称矩阵的压缩存储

- 设有一个 $n \times n$ 的对称矩阵 A 。

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

- 对称矩阵中的元素关于主对角线对称，
 $a_{ij} = a_{ji}, \quad 0 \leq i, j \leq n-1$

- 为节约存储，只存对角线及对角线以上的元素，或者只存对角线或对角线以下的元素。前者称为上三角矩阵，后者称为下三角矩阵。

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

下三角矩阵

a_{00}	a_{01}	a_{02}	$\cdots$	a_{0n-1}
a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n-1}
a_{20}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n-1}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{n-10}	a_{n-11}	a_{n-12}	$\cdots$	a_{n-1n-1}

上三角矩阵

- 把它们按行存放于一个一维数组 **B** 中，称之为对称矩阵 **A** 的压缩存储方式。
- 数组 **B** 共有 $n + (n - 1) + \cdots + 1 =$
 $n*(n+1) / 2$ 个元素。

下三角矩阵

$$\begin{bmatrix}
 a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\
 a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\
 a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1}
 \end{bmatrix}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8		$n(n+1)/2-1$
B	a_{00}	a_{10}	a_{11}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{30}	a_{31}	a_{32}		a_{n-1n-1}

若 $i \geq j$, 数组元素 $A[i][j]$ 在数组 **B** 中的存放位置为 $1 + 2 + \cdots + i + j = (i+1) * i / 2 + j$

前 i 行元素总数 第 i 行第 j 个元素前元素个数

- 若 $i < j$ ，数组元素 $A[i][j]$ 在矩阵的上三角部分，在数组 B 中没有存放，可以找它的对称元素 $A[j][i]$ ：
$$= j * (j + 1) / 2 + i$$
- 若已知某矩阵元素位于数组 B 的第 k 个位置 ($k \geq 0$)，可寻找满足

$$i(i + 1) / 2 \leq k < (i + 1) * (i + 2) / 2$$

的 i ，此即为该元素的行号。

$$j = k - i * (i + 1) / 2$$

此即为该元素的列号。

- 例，当 $k = 8$ ， $3 * 4 / 2 = 6 \leq k < 4 * 5 / 2 = 10$ ，取 $i = 3$ 。则 $j = 8 - 3 * 4 / 2 = 2$ 。

$n = 4$

a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

上三角矩阵

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}

若 $i \leq j$ ，数组元素 $A[i][j]$ 在数组 **B** 中的存放位置为

$$\underbrace{n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-i+1)}_{\text{前 } i \text{ 行元素总数}} + \underbrace{j-i}_{\text{第 } i \text{ 行第 } j \text{ 个元素前元素个数}}$$

前 i 行元素总数 第 i 行第 j 个元素前元素个数

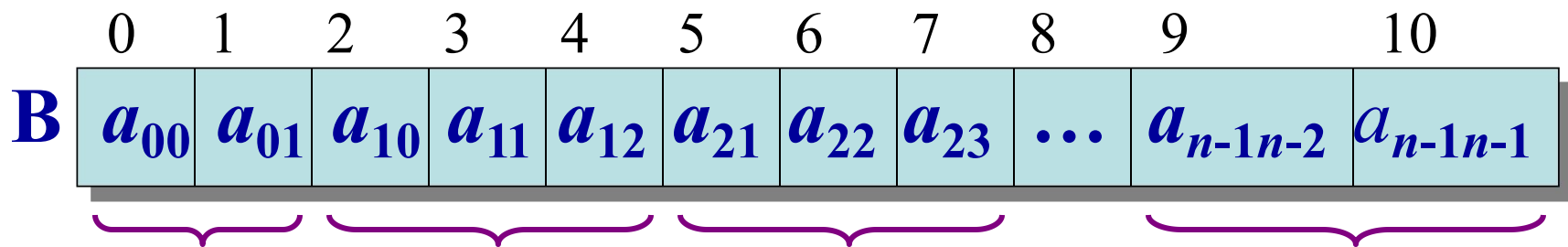
- 若 $i \leq j$, 数组元素 $A[i][j]$ 在数组 B 中的存放位置为

$$\begin{aligned} & n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-i+1) + j-i = \\ & = (2*n-i+1) * i / 2 + j-i = \\ & = (2*n-i-1) * i / 2 + j \end{aligned}$$

- 若 $i > j$, 数组元素 $A[i][j]$ 在矩阵的下三角部分, 在数组 B 中没有存放。因此, 找它的对称元素 $A[j][i]$ 。 $A[j][i]$ 在数组 B 的第 $(2*n-j-1) * j / 2 + i$ 的位置中找到。

三对角矩阵的压缩存储

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-2n-3} & a_{n-2n-2} & a_{n-2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$



- 三对角矩阵中除主对角线及在主对角线上下最临近的两条对角线上的元素外，所有其它元素均为0。总共有 $3n-2$ 个非零元素。
- 将三对角矩阵A中三条对角线上的元素按行存放在一维数组B中，且 a_{00} 存放于B[0]。
- 在三条对角线上的元素 a_{ij} 满足
$$0 \leq i \leq n-1, \quad i-1 \leq j \leq i+1$$
- 在一维数组B中A[i][j]在第i行，它前面有 $3*i-1$ 个非零元素，在本行中第j列前面有 $j-i+1$ 个，所以元素A[i][j]在B中位置为 $k = 2*i + j$ 。

- 若已知三对角矩阵中某元素 $A[i][j]$ 在数组 $B[]$ 存放于第 k 个位置, 则有

$$i = \lfloor (k + 1) / 3 \rfloor$$

$$j = k - 2 * i$$

- 例如, 当 $k = 8$ 时,

$$i = \lfloor (8+1) / 3 \rfloor = 3, j = 8 - 2*3 = 2$$

当 $k = 10$ 时,

$$i = \lfloor (10+1) / 3 \rfloor = 3, j = 10 - 2*3 = 4$$

稀疏矩阵 (Sparse Matrix)

$$A_{6 \times 7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 \\ 91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 设矩阵 A 中有 s 个非零元素，若 s 远远小于矩阵元素的总数（即 $s \ll m \times n$ ），则称 A 为稀疏矩阵。

- 设矩阵 A 中有 s 个非零元素。令 $e = s/(m \times n)$, 称 e 为矩阵的稀疏因子。
- 有人认为 $e \leq 0.05$ 时称之为稀疏矩阵。
- 在存储稀疏矩阵时, 为节省存储空间, 应只存储非零元素。但由于非零元素的分布一般没有规律, 故在存储非零元素时, 必须记下它所在的行和列的位置 (i, j) 。
- 每一个三元组 (i, j, a_{ij}) 唯一确定了矩阵 A 的一个非零元素。因此, 稀疏矩阵可由表示非零元素的一系列三元组及其行列数唯一确定。

稀疏矩阵的定义

```
const int drows = 6, dcols = 7, dterms = 9;
template<class E>
struct Triple {           //三元组
    int row, col;          //非零元素行号/列号
    E value;               //非零元素的值
    void operator = (Triple<E>& R)    //赋值
        { row = R.row; col = R.col; value = R.value; }
};
```

```

template <class E>
class SparseMatrix {
    public:
        SparseMatrix (int Rw = drows, int Cl = dcols,
            int Tm = dterms);           //构造函数
        void Transpose(SparseMatrix<E>& b); //转置
        void Add (SparseMatrix<E>& a,
            SparseMatrix<E>& b);         //a = a+b
        void Multiply (SparseMatrix<E>& a,
            SparseMatrix<E>& b);         //a = a*b
    private:
        int Rows, Cols, Terms;          //行 / 列 / 非零元素数
        Triple<E> *smArray;             //三元组表
};

```

稀疏矩阵的构造函数

```
template <class E>
SparseMatrix<E>::SparseMatrix (int Rw, int Cl, int
    Tm) {
    Rows = Rw;  Cols = Cl;  Terms = Tm;
    smArray = new Triple[Terms];      //三元组表
    if (smArray == NULL) {
        cerr << “存储分配失败！ ” << endl; exit(1);
    }
};
```

稀疏矩阵的转置

- 一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，它的转置矩阵 B 是一个 $n \times m$ 的矩阵，且 $A[i][j] = B[j][i]$ 。即
 - ◆ 矩阵 A 的行成为矩阵 B 的列
 - ◆ 矩阵 A 的列成为矩阵 B 的行。
- 在稀疏矩阵的三元组表中，非零矩阵元素按行存放。当行号相同时，按列号递增的顺序存放。
- 稀疏矩阵的转置运算要转化为对应三元组表的转置。

稀疏矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 \\ 91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	行 (row)	列 (col)	值 (value)
[0]	0	3	22
[1]	0	6	15
[2]	1	1	11
[3]	1	5	17
[4]	2	3	-6
[5]	3	5	39
[6]	4	0	91
[7]	5	2	28

转置矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 91 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 \\ 22 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 39 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	行 (row)	列 (col)	值 (value)
[0]	0	4	91
[1]	1	1	11
[2]	2	5	28
[3]	3	0	22
[4]	3	2	-6
[5]	5	1	17
[6]	5	3	39
[7]	6	0	16

用三元组表表示的稀疏矩阵及其转置

原矩阵三元组表

	行 (row)	列 (col)	值 (value)
[0]	0	3	22
[1]	0	6	15
[2]	1	1	11
[3]	1	5	17
[4]	2	3	-6
[5]	3	5	39
[6]	4	0	91
[7]	5	2	28

转置矩阵三元组表

	行 (row)	列 (col)	值 (value)
[0]	0	4	91
[1]	1	1	11
[2]	2	5	28
[3]	3	0	22
[4]	3	2	-6
[5]	5	1	17
[6]	5	3	39
[7]	6	0	16

稀疏矩阵转置算法思想

- 设矩阵列数为 **Cols**，对矩阵三元组表扫描 **Cols** 次。
- 第 **k** 次扫描找寻所有列号为 **k** 的项，将其行号变列号、列号变行号，顺次存于转置矩阵三元组表。

稀疏矩阵的转置

```
template <class E>
void SparseMatrix<E> ::
Transpose (SparseMatrix<E>& B) {
//转置this矩阵, 转置结果由B返回
    B.Rows = Cols; B.Cols = Rows;
    B.Terms = Terms;
    //转置矩阵的列数,行数和非零元素个数
    if (Terms > 0) {
        int CurrentB = 0; //转置三元组表存放指针
        int i, k;
```

```

for (k = 0; k < Cols; k++)    //处理所有列号
    for (i = 0; i < Terms; i++)
        if (smArray[i].col == k) {
            B.smArray[CurrentB].row = k;
            B.smArray[CurrentB].col =
                smArray[i].row;
            B.smArray[CurrentB].value=
                smArray[i].value;
            CurrentB++;
        }
    }
};

```

快速转置算法

- 设矩阵三元组表总共有 t 项，上述算法的时间代价为 $O(n * t)$ 。当非零元素的个数 t 和 $m * n$ 同数量级时，算法Transpose的时间复杂度为 $O(m * n^2)$ 。
- 若矩阵有 200 行，200 列，10,000 个非零元素，总共有 2,000,000 次处理。
- 快速转置算法的思想为：对原矩阵A扫描一遍（实际为两遍，建辅助数组需扫描一遍），按A中每一元素的列号，立即确定在转置矩阵B三元组表中的位置，并装入它。

- 为加速转置速度，建立辅助数组 **rowSize** 和 **rowStart**:
 - ◆ **rowSize**记录矩阵转置前各列，即转置矩阵各行非零元素个数；
 - ◆ **rowStart**记录转置矩阵各行非零元素在转置三元组表中开始存放位置。
- 扫描矩阵三元组表，根据某项列号，确定它转置后的行号，查 **rowStart** 表，按查到的位置直接将该项存入转置三元组表中。

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	语 义
rowSize	1	1	1	2	0	2	1	矩阵 A 各列非零元素个数
rowStart	0	1	2	3	5	5	7	矩阵 B 各行开始存放位置

A三元组	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
行row	0	0	1	1	2	3	4	5
列col	3	6	1	5	3	5	0	2
值value	22	15	11	17	-6	39	91	28

稀疏矩阵的快速转置算法

```
template <class E>
void SparseMatrix<E>::
    FastTranspose (SparseMatrix<E>& B) {
    int *rowSize = new int[Cols];    //列元素数数组
    int *rowStart = new int[Cols];  //转置位置数组
    B.Rows = Cols;  B.Cols = Rows;
    B.Terms = Terms;
    if (Terms > 0) {
        int i, j;
        for (i = 0; i < Cols; i++) rowSize[i] = 0;
```

```

for (i = 0; i < Terms; i++)
    rowSize[smArray[i].col]++; //该列对应计数增加
rowStart[0] = 0;
for (i = 1; i < Cols; i++)
    rowStart[i] = rowStart[i-1]+rowSize[i-1]; //计算转
置矩阵各行初始位置
for (i = 0; i < Terms; i++) {
    j = rowStart [smArray[i].col]; //获取当前位置
    B.smArray[j].row = smArray[i].col;
    B.smArray[j].col = smArray[i].row;
    B.smArray[j].value = smArray[i].value;
    rowStart [smArray[i].col]++; //更新当前位置
}
}
delete [ ] rowSize; delete [ ] rowStart;
}

```

带行指针数组的二元组表

- 稀疏矩阵的三元组表可以用带行指针数组的二元组表代替。
- 在行指针数组中元素个数与矩阵行数相等。第 i 个元素的下标 i 代表矩阵的第 i 行，元素的内容即为稀疏矩阵第 i 行的第一个非零元素在二元组表中的存放位置。

- 二元组表中每个二元组只记录非零元素的列号和元素值，且各二元组按行号递增的顺序排列。

行指针数组

row

0	0
1	3
2	4
3	6
4	-1
5	7

二元组表 data

col value

0	0	12
1	2	11
2	5	13
3	6	14
4	1	-4
5	5	3
6	3	8
7	1	-9
8	4	2

用正交链表来表示稀疏矩阵

□ 优点：适应矩阵操作(+、-、*)时矩阵非零元素的动态变化

□ 稀疏矩阵表示为行链表与列链表的十字交叉——称为正交链表（十字链表）

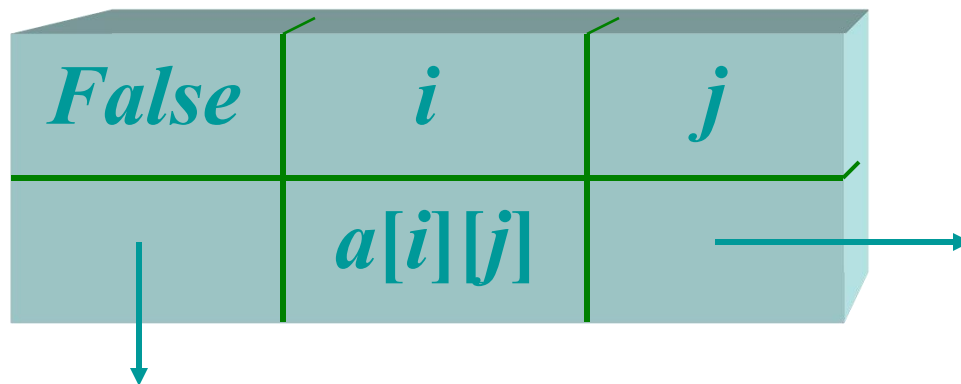
- 稀疏矩阵的结点

<i>head</i>	<i>next</i>
<i>down</i>	<i>right</i>

(a) 行/列表头结点

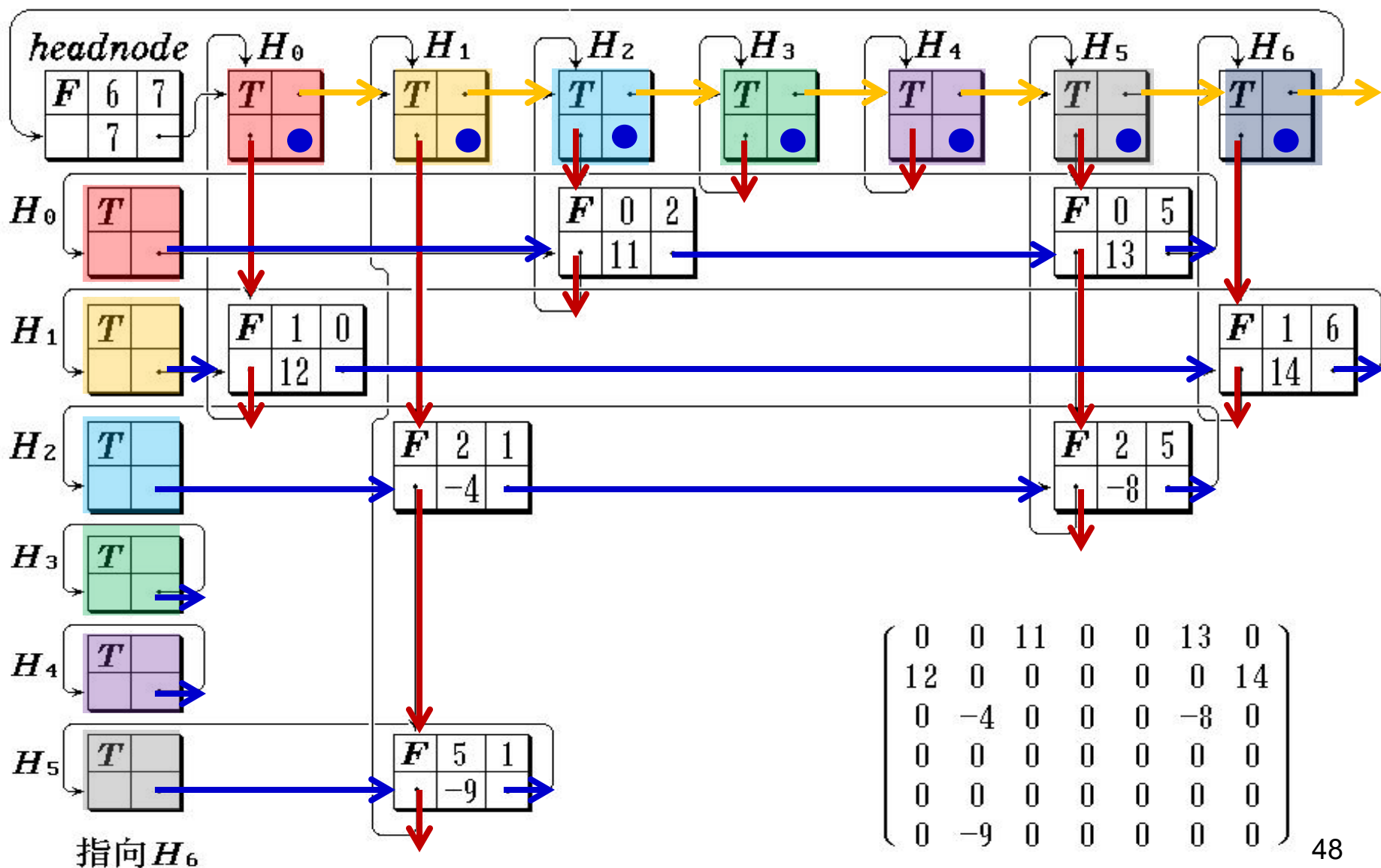
<i>head</i>	<i>row</i>	<i>col</i>
<i>down</i>	<i>value</i>	<i>right</i>

(b) 非零元素结点



(c) 建立 $a[i][j]$ 结点

稀疏矩阵的正交链表表示的示例



1. 6 阶对称矩阵只保存下三角部分，并按行放入一维数组 `B`，`B[0]` 保存 `A[0][0]`。求 `A[1][4]` 对应的 `B` 下标。

2. 7 阶三对角矩阵按行压缩存储，并采用 `k=2i+j`。若某个有效元素存于 `B[13]`，求其矩阵下标。

3. 一个 `4×5` 稀疏矩阵的三元组表按行、列有序：

(0,2,8), (1,0,5), (1,4,7), (3,1,6), (3,4,9)

写出 `rowSize`、初始 `rowStart`，以及转置后三元组表。

4. 某稀疏矩阵在计算过程中会频繁插入和删除非零元素，并且经常需要按行和按列遍历。三元组顺序表、带行指针的二元组表、正交链表中，哪一种更合适？

1. 6 阶对称矩阵只保存下三角部分，并按行放入一维数组 `B`，`B[0]` 保存 `A[0][0]`。求 `A[1][4]` 对应的 `B` 下标。

答案：`A[1][4]` 位于上三角，利用对称性转为 `A[4][1]`。下标为 $4*(4+1)/2+1=11$ 。

2. 7 阶三对角矩阵按行压缩存储，并采用 $k=2i+j$ 。若某个有效元素存于 `B[13]`，求其矩阵下标。

答案： $i=\text{floor}((13+1)/3)=4$ ， $j=13-2*4=5$ ，所以是 `A[4][5]`。

3. 一个 `4×5` 稀疏矩阵的三元组表按行、列有序：

(0,2,8), (1,0,5), (1,4,7), (3,1,6), (3,4,9)

写出 `rowSize`、初始 `rowStart`，以及转置后三元组表。

答案：

- 原矩阵第 0 至 4 列的非零项数为 `rowSize=[1,1,1,0,2]`。
- 前缀起点为 `rowStart=[0,1,2,3,3]`。
- 转置表为 `(0,1,5), (1,3,6), (2,0,8), (4,1,7), (4,3,9)`。

4. 某稀疏矩阵在计算过程中会频繁插入和删除非零元素，并且经常需要按行和按列遍历。三元组顺序表、带行指针的二元组表、正交链表中，哪一种更合适？

答案：正交链表更合适。它同时保留行方向和列方向链接，插入或删除局部结点时不需要移动大片连续元素。

字符串 (String)

- 字符串是 n (≥ 0) 个字符组成的有限序列，
记作 $S : "c_0c_1c_2 \dots c_{n-1}"$
其中， S 是串名字
 “ $c_0c_1c_2 \dots c_{n-1}$ ”是串值
 (默认包含串结束符 ‘\0’)
 c_i 是串中字符
 n 是串的长度， $n = 0$ 称为空串。
- 例如， $S = \text{"Nanjing University"}$ 。
- 注意：空串和空白串不同，例如 “ ” 和 “”
分别表示长度为1的空白串和长度为0的空串。

字符串的类定义

```
#ifndef ASTRING_H    //定义在文件“Astring.h”中
#define ASTRING_H
#define defaultSize = 128;    //字符串的最大长度
class AString {
//对象：零个或多个字符组成的一个有限序列。
private:
    char *ch;                //串存放数组
    int curLength;            //串的实际长度
    int maxSize;              //存放数组的最大长度
```

public:

AString(int sz = defaultSize); **//构造函数**

AString(const char *init); **//构造函数**

AString(const AString& ob); **//复制构造函数**

~AString() {delete []ch; } **//析构函数**

int Length() const { return curLength; } **//求长度**

Astring& operator() (int pos, int len); **//求子串**

bool operator == (AString& ob) const

{ return strcmp (ch, ob.ch) == 0; }

//判串相等. 若串相等, 则函数返回true

bool operator != (AString& ob) const

{ return strcmp (ch, ob.ch) != 0; }

//判串不等. 若串不相等, 则函数返回true

```
bool operator ! () const { return curLength == 0; }  
    //判串空否。若串空, 则函数返回true  
AString& operator = (AString& ob);    //串赋值  
AString& operator += (AString& ob);    //串连接  
char& operator [ ] (int i);          //取第 i 个字符  
int Find (AString& pat, int start) const; //串匹配  
};
```

字符串的构造函数

```
AString::AString(int sz) {  
    //构造函数：创建一个空串  
    maxSize = sz;  
    ch = new char[maxSize+1];    //创建串数组  
    if (ch == NULL)  
        { cerr << “存储分配错!\n”; exit(1); }  
    curLength = 0;  
    ch[0] = '\0';  
};
```

字符串的构造函数

```
AString::AString(const char *init) {
```

```
//复制构造函数: 从已有字符数组*init复制
```

```
    int len = strlen(init);
```

```
    maxSize = (len > defaultSize) ? len : defaultSize;
```

```
    ch = new char[maxSize+1];    //创建串数组
```

```
    if (ch == NULL)
```

```
        { cerr << “存储分配错！\n”; exit(1); }
```

```
    curLength = len;                //复制串长度
```

```
    strcpy(ch, init);              //复制串值
```

```
};
```

字符串的复制构造函数

```
AString :: AString(const AString& ob) {  
    //复制构造函数：从已有串ob复制  
    maxSize = ob.maxSize;           //复制串最大长度  
    ch = new char[maxSize + 1];     //创建串数组  
    if (ch == NULL)  
        { cerr << “存储分配错! \n”; exit(1); }  
    curLength = ob.curLength;       //复制串长度  
    strcpy(ch, ob.ch);              //复制串值  
};
```

字符串重载操作的使用示例

序号	重载操作	操作	使用示例 (设使用操作的当前串为S: 'good')
1	<code>() (int pos, int len)</code>	取子串	<code>S1 = S(1, 3)</code> , //S1结果为 'ood'
2	<code>== (const AString& ob)</code>	判两串相等	<code>S == S1</code> , //若S与S1相等, 结果为true, 否则为false
3	<code>!= (const AString& ob)</code>	判两串不等	<code>S != S1</code> , //若S与S1不等, 结果为true, 否则为false
4	<code>!()</code>	判串空否	<code>!S</code> , //若串S为空, 结果为true, 否则为false

序号	重载操作	操作	使用示例 (设使用操作的当前串为S: 'good')
5	<code>= (const AString& ob)</code>	串赋值	<code>S1 = S</code> , //S1结果为 'good'
6	<code>+= (const AString& ob)</code>	串连接	若设S1为 ' morning', 执行 <code>S += S1</code> , //S结果为 'good morning'
7	<code>[] (int i)</code>	取第 i 个字符	<code>S[3]</code> , //取出字符为 'd'

- 串中任意个连续字符组成的子序列称为该串的子串，包含子串的串相应地称为主串。

- 设A和B分别为

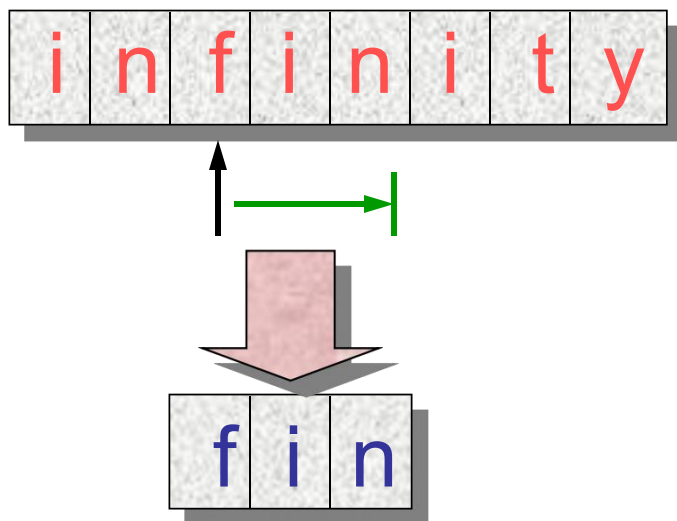
A = “This is a string” B = “is”

则 **B** 是 **A** 的子串，**A** 为主串。**B** 在 **A** 中出现了两次，首次出现所对应的主串位置是2（从0开始）。因此，称 **B 在 A 中的位置为2**。

- 特别地，空串是任意串的子串，任意串是其自身的子串。

提取子串的算法示例

pos = 2, len = 3

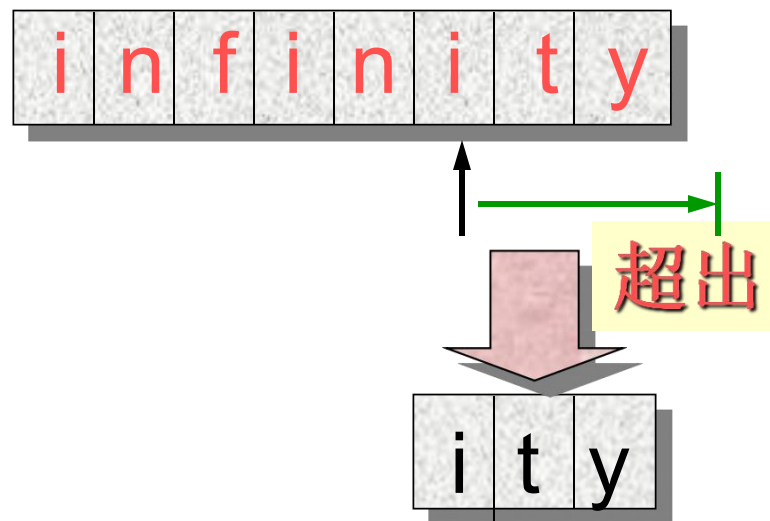


$\text{pos} + \text{len} - 1$

$\leq \text{curLength} - 1$

可以全部提取

pos = 5, len = 4



$\text{pos} + \text{len} - 1$

$\geq \text{curLength}$

只能从pos取到串尾

串重载操作：提取子串

```
AString AString::operator () (int pos, int len) {  
    //从串中第 pos 个位置起连续提取 len 个字符形成  
    //子串返回  
    AString temp;                                //建立空串对象  
    if (pos >= 0 && pos+len-1 < maxSize && len > 0)  
    {                                              //提取子串  
        if (pos+len-1 >= curLength)  
            len = curLength - pos;              //调整提取字符数  
        temp.curLength = len;                    //子串长度  
    }  
}
```

```
    for (int i = 0, j = pos; i < len; i++, j++)  
        temp.ch[i] = ch[j];        //传送串数组  
    temp.ch[len] = '\0';          //子串结束  
}  
return temp;  
};
```

- 例：串 `st = “university”`, `pos = 3`, `len = 4`
使用示例 `subSt = st(3, 4)`
提取子串 `subSt = “vers”`

串重载操作：串赋值

```
AString& AString::operator = (const AString& ob) {  
    if (&ob != this) {        //若两个串相等为自我赋值  
        delete []ch;  
        ch = new char[maxSize+1];    //重新分配  
        if (ch == NULL)  
            { cerr << “存储分配失败!\n”; exit(1); }  
        curLength = ob.curLength; strcpy(ch,ob.ch);  
    }  
    else cout << “字符串自身赋值出错!\n”;  
    return this;  
};
```

串重载操作：取串的第i个字符

```
char AString::operator [ ] (int i) {  
    //串重载操作：取当前串*this的第i个字符  
    if (i < 0 || i >= curLength)  
        { cout << “字符串下标超界!\n ”; exit(1); }  
    return ch[i];  
};
```

- 例：串 `st = “university”`,
使用示例 `newSt = st; newChar = st[1];`
数组赋值结果 `newSt = “university”`
提取字符结果 `newChar = ‘n’`

串重载操作：串连接

```
AString& AString::operator += (const AString& ob)
{
    char *temp = ch;                //暂存原串数组
    int n = curLength + ob.curLength; //串长度累加
    int m = (maxSize >= n) ? maxSize : n; //新空间大小
    ch = new char[m];
    if (ch == NULL)
        { cerr << “存储分配错!\n”; exit(1); }
    maxSize = m; curLength = n;
    strcpy(ch, temp);                //拷贝原串数组
    strcat(ch, ob.ch);               //连接ob串数组
}
```

```
delete []temp;  
return this;  
};
```

- 例：串 **st1 = “Nanjing ”**,
 st2 = “university”,
使用示例 **st1 += st2;**
连接结果 **st1 = “Nanjing university”**
 st2 = “university”

1. 分别写出 ""、" "、"\0" 作为 C 风格字符串时的逻辑长度，并说明物理存储至少需要几个字符单元。

2. 字符串 `S="structure"`，下标从 0 开始。执行取子串操作 `S(5,10)`，约定若长度越过串尾则截到串尾。结果是什么？

3. 两个串逻辑长度分别为 7 和 5。连接函数计算 `n=12` 后执行 `ch = new char[n]`，再复制两个串并补写结束符。指出错误、后果和修正方法。

1. 分别写出 ""、" "、"\0" 作为 C 风格字符串时的逻辑长度，并说明物理存储至少需要几个字符单元。

答案：

- "" 的逻辑长度为 0，至少需要 1 个单元保存结束符。

- " " 的逻辑长度为 1，至少需要 2 个单元。

- "\0" 的第一个字符就是结束符，因此按 C 风格字符串解释时逻辑长度为 0，至少需要 1 个单元。

2. 字符串 `S="structure"`，下标从 0 开始。执行取子串操作 `S(5,10)`，约定若长度越过串尾则截到串尾。结果是什么？

答案：下标 5 对应字符 `t`，从该处到串尾得到 `"ture"`，实际长度为 4。

3. 两个串逻辑长度分别为 7 和 5。连接函数计算 `n=12` 后执行 `ch = new char[n]`，再复制两个串并补写结束符。指出错误、后果和修正方法。

答案：少分配了结束符所需的一个字符单元。写入 `ch[12]='\0'` 会越界。应分配 `new char[n+1]`，并确保容量字段的含义与分配量一致。

串的模式匹配

- 定义 在主串中寻找子串（第一个字符）在串中的位置
- 词汇 在模式匹配中，子串称为模式，主串称为目标。
- 示例 目标 T : “Nanjin”
模式 P : “jin”
匹配结果 = 3

朴素的模式匹配

第1趟

<i>T</i>	a	b	b	a	b	a
<i>P</i>	a	b	a			

$i=2$
 $j=2$

第3趟

<i>T</i>	a	b	b	a	b	a
<i>P</i>			a	b	a	

$i=2$
 $j=0$

第2趟

<i>T</i>	a	b	b	a	b	a
<i>P</i>		a	b	a		

$i=1$
 $j=0$

第4趟

<i>T</i>	a	b	b	a	b	a
<i>P</i>				a	b	a

$i=6$
 $j=3$

朴素的模式匹配算法

```
int AString::Find(AString& pat, int start) const {  
    //在当前串中从第 start 个字符开始寻找模式 pat 在当  
    //前串中匹配的位置。若匹配成功, 则函数返回首  
    //次匹配的位置, 否则返回-1。  
    int i, j, n = curLength, m = pat.curLength;  
    if (m == 0) return -1;    //pat为空  
    for (i = start; i <= n-m; i++) {  
        for (j = 0; j < m; j++){  
            if (ch[i+j] != pat.ch[j]) break;    //本次失配  
        }  
        if (j == m) return i;    //pat扫描完, 匹配成功  
    }  
    return -1;    //在*this中找不到子串  
};
```

- 在最坏情况下，若设 n 为目标串长度， m 为模式串长度，则匹配算法最多比较 $n-m+1$ 趟，每趟比较都在比较到模式串尾部才出现不等，要做 m 次比较，总比较次数将达到 $(n-m+1)*m$ 。在多数场合下 m 远小于 n ，因此，算法的运行时间为 $O(n*m)$ 。
- 低效的原因在于每趟重新比较时，目标串的检测指针要回退。

改进的模式匹配

- 只要消除了每趟失配后为实施下一趟比较时目标指针的回退，就可以提高模式匹配效率。
- 这种处理思想是由**D.E.Knuth**、**J.H.Morris**和**V.R.Pratt**同时提出来的，故称为**KMP**算法。

改进的模式匹配

目标 **T** $t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{m-1} \quad \dots \quad t_{n-1}$
 $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \quad \quad \updownarrow$

模式 **P** $p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{m-1}$

目标 **T** $t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{m-1} \quad t_m \quad \dots \quad t_{n-1}$
 $\quad \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \quad \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

模式 **P** $p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{m-2} \quad p_{m-1}$

目标 **T** $t_0 \quad t_1 \quad \dots \quad t_i \quad t_{i+1} \dots \quad t_{i+m-2} \quad t_{i+m-1} \dots \quad t_{n-1}$
 $\quad \quad \quad \parallel \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \parallel$

模式 **P** $p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{m-2} \quad p_{m-1}$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \mathbf{T} & t_0 & t_1 & \dots & t_{s-1} & t_s & t_{s+1} & t_{s+2} & \dots & t_{s+j-1} & t_{s+j} & t_{s+j+1} & \dots & t_{n-1} \\
 & & & & & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \times & & & \\
 \mathbf{P} & & & & & p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{j-1} & p_j & & &
 \end{array}$$

则有 $t_s t_{s+1} t_{s+2} \dots t_{s+j-1} = p_0 p_1 p_2 \dots p_{j-1} \quad (1)$

下一趟，为使模式 $\mathbf{P}$ 与目标 $\mathbf{T}$ 匹配，必须满足

$$p_0 p_1 p_2 \dots p_{j-1} \dots p_{m-1} = t_{s+1} t_{s+2} t_{s+3} \dots t_{s+j} \dots t_{s+m}$$

如果 $p_0 p_1 \dots p_{j-2} \neq p_1 p_2 \dots p_{j-1} \quad (2)$

则立刻可以断定

$$p_0 p_1 \dots p_{j-2} \neq t_{s+1} t_{s+2} \dots t_{s+j-1}$$

下一趟必不匹配 $p_0 p_1 \dots p_{j-2}$

同样，若 $p_0 p_1 \dots p_{j-3} \neq p_2 p_3 \dots p_{j-1}$
 则再下一趟也不匹配，因为有

$$p_0 p_1 \dots p_{j-3} \neq t_{s+2} t_{s+3} \dots t_{s+j-1}$$

直到对于某一个“k”值，使得

$$p_0 p_1 \dots p_{k+1} \neq p_{j-k-2} p_{j-k-1} \dots p_{j-1}$$

且

$$p_0 p_1 \dots p_k = p_{j-k-1} p_{j-k} \dots p_{j-1}$$

则

$$p_0 p_1 \dots p_k = t_{s+j-k-1} t_{s+j-k} \dots t_{s+j-1}$$

$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$

$$p_{j-k-1} p_{j-k} \dots p_{j-1}$$

下一趟可以直接用 p_{k+1} 与 t_{s+j} 继续比较。

k 的确定方法

- **Knuth** 等人发现，对于不同的 j （失配位置）， k 的取值不同，它仅依赖于模式 P 本身前 j 个字符的构成，与目标无关。
- 可以用一个 **next** 特征向量来确定：当模式 P 中第 j 个字符与目标 T 中相应字符失配时，模式 P 中应当由哪个字符（设为第 $k+1$ 个）与目标中刚失配的字符重新继续进行比较。

- 设模式 $P = p_0p_1 \dots p_{m-2}p_{m-1}$, **next**特征向量定义如下:

$$\text{next}(j) = \begin{cases} -1, & j = 0 \\ k + 1, & 0 \leq k < j-1 \text{ 且使得 } p_0p_1 \dots p_k = p_{j-k-1}p_{j-k} \dots p_{j-1} \text{ 的最大整数} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

- 示例

j	0	1	2	3	4	5	6	7
P	a	b	a	a	b	c	a	c
next(j)	-1	0	0	1	1	2	0	1

利用next特征向量进行匹配处理

- 若设在进行某一趟匹配比较时在模式 P 的第 j 位失配：
 - ◆ 如果 $j > 0$ ，那么在下一趟比较时模式串 P 的起始比较位置是 $p_{\text{next}(j)}$ ，目标串 T 的指针不回溯，仍指向上一趟失配的字符；
 - ◆ 如果 $j = 0$ ，则目标串指针 T 进一，模式串指针 P 回到 p_0 ，继续进行下一趟匹配比较。

运用KMP算法的匹配过程

第1趟 目标 *a c a b a a b a a b c a c a a b c*
模式 *a b a a b c a c*
× $j=1 \Rightarrow \text{next}(1) = 0$, 下次 p_0

第2趟 目标 *a c a b a a b a a b c a c a a b c*
模式 *a b a a b c a c*
× $j=0 \Rightarrow$ 下次 p_0 , 目标指针进 1

第3趟 目标 *a c a b a a b a a b c a c a a b c*
模式 *a b a a b c a c*
× $j=5 \Rightarrow \text{next}(5) = 2$,
下次 p_2

第4趟 目标 *a c a b a a b a a b c a c a a b c*
模式 *(a b) a a b c a c* ✓

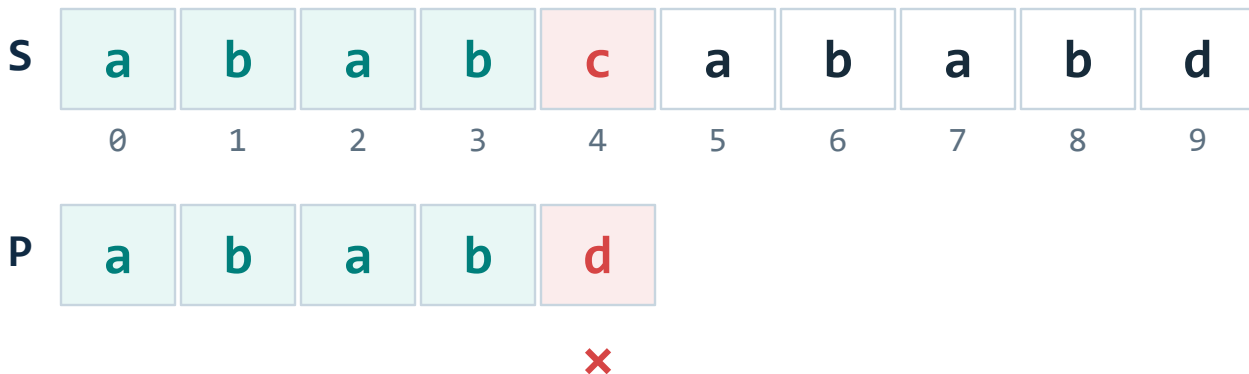
用KMP算法实现快速匹配算法

```
int AString::fastFind(AString& pat, int start,
    int next[]) const {
    //从 start 开始寻找 pat 在 this 串中匹配的位置。若找
    //到，函数返回 pat 在 this 串中开始位置，否则函
    //数返回-1。数组next[ ] 存放 pat 的next[j] 值。
    int posP = 0, posT = start;           //两个串的扫描指针
    int lengthP = pat.curLength;          //模式串长度
    int lengthT = curLength;              //目标串长度
    while (posP < lengthP && posT < lengthT)
    {   if (posP == -1 || pat.ch[posP] == ch[posT])
        { posP++; posT++; }                //对应字符匹配
        else posP = next[posP];           //求pat下趟比较位置
    }
    if (posP < lengthP) return -1;         //匹配失败
    else return posT-lengthP;              //匹配成功
};
```

- 此算法的时间复杂度取决于 **while** 循环。由于是无回溯的算法，执行循环时，目标串字符比较有进无退，要么执行 **posT** 和 **posP** 进 1，要么查找 **next[]** 数组进行模式位置的右移，然后继续向后比较。
- 若设 **n** 为目标串长度，**m** 为模式串长度，字符的比较次数最多为 **O(n)**，不超过目标串的长度。

计算NEXT数组——朴素匹配的重复比较

模式串前 4 个字符已经匹配，第 5 个字符失配



朴素算法
文本起点改为 1
前面的比较全部重做



KMP
文本指针保持 $i = 4$
模式指针按边界回退

关键问题：已经匹配的 abab 中，哪些信息可以复用？

前缀、后缀与边界

对字符串 $X = \text{ababa}$ ，只讨论真前缀与真后缀

类型	长度 1	长度 2	长度 3	长度 4
真前缀	a	ab	aba	abab
真后缀	a	ba	aba	baba

边界 border

同时是真前缀和真后缀的字符串

a

aba

最长边界长度 LPS
= 3

LPS: longest proper prefix which is also a suffix

最长相等前后缀的逐步增长

模式串 $P = \text{ababaca}$ 的每个前缀都有自己的最长边界

i	$P[0..i]$	最长边界	$\pi[i]$
0	a	ϵ	0
1	ab	ϵ	0
2	aba	a	1
3	abab	ab	2
4	ababa	aba	3
5	ababac	ϵ	0
6	ababaca	a	1

新字符 c 打断了 aba 的延续，边界长度从 3 回到 0

失配后的模式串移动

已经匹配 $P[0..4] = ababa$, 下一次比较在 $j = 5$ 失配

S	a	b	a	b	a	b	x
	0	1	2	3	4	5	6

P	a	b	a	b	a	c	a
---	---	---	---	---	---	---	---

×

ababa 的最长边界 = aba, $k = 3$



模式右移 2 位

P'

a	b	a	b	a	c	a
---	---	---	---	---	---	---

保留已经确认相等的 aba, 文本指针 i 不回退

next 数组的统一定义

0 下标约定

$$\text{next}[0] = -1$$

$j \geq 1$ 时

$$\text{next}[j] = \text{LPS}(P[0..j-1])$$

$\text{next}[j]$ 只由失配位置 j 之前的已匹配部分决定

发生失配



$$j = \text{next}[j]$$



继续比较

$$\text{关系: } \text{next}[j] = \pi[j-1] \quad (j \geq 1)$$

π 记录“包含当前位置”的边界, next 记录“失配前”的边界

ababaca 的 next 数组

每一列回答：在 $P[j]$ 失配时，模式指针回到哪里？

j	0	1	2	3	4	5	6
$P[j]$	a	b	a	b	a	c	a
考察串	—	a	ab	aba	abab	ababa	ababac
最长边界	—	ϵ	ϵ	a	ab	aba	ϵ
next[j]	-1	0	0	1	2	3	0

最终结果

$[-1, 0, 0, 1, 2, 3, 0]$

例：next[5] = 3，因为 $P[0..4] = ababa$ 的最长边界是 aba

计算 next 数组

设已经知道 $\text{next}[j-1]=k$ 。现在要判断 $P[j-1]$ 是否能接在长度 k 的相等前后缀之后。

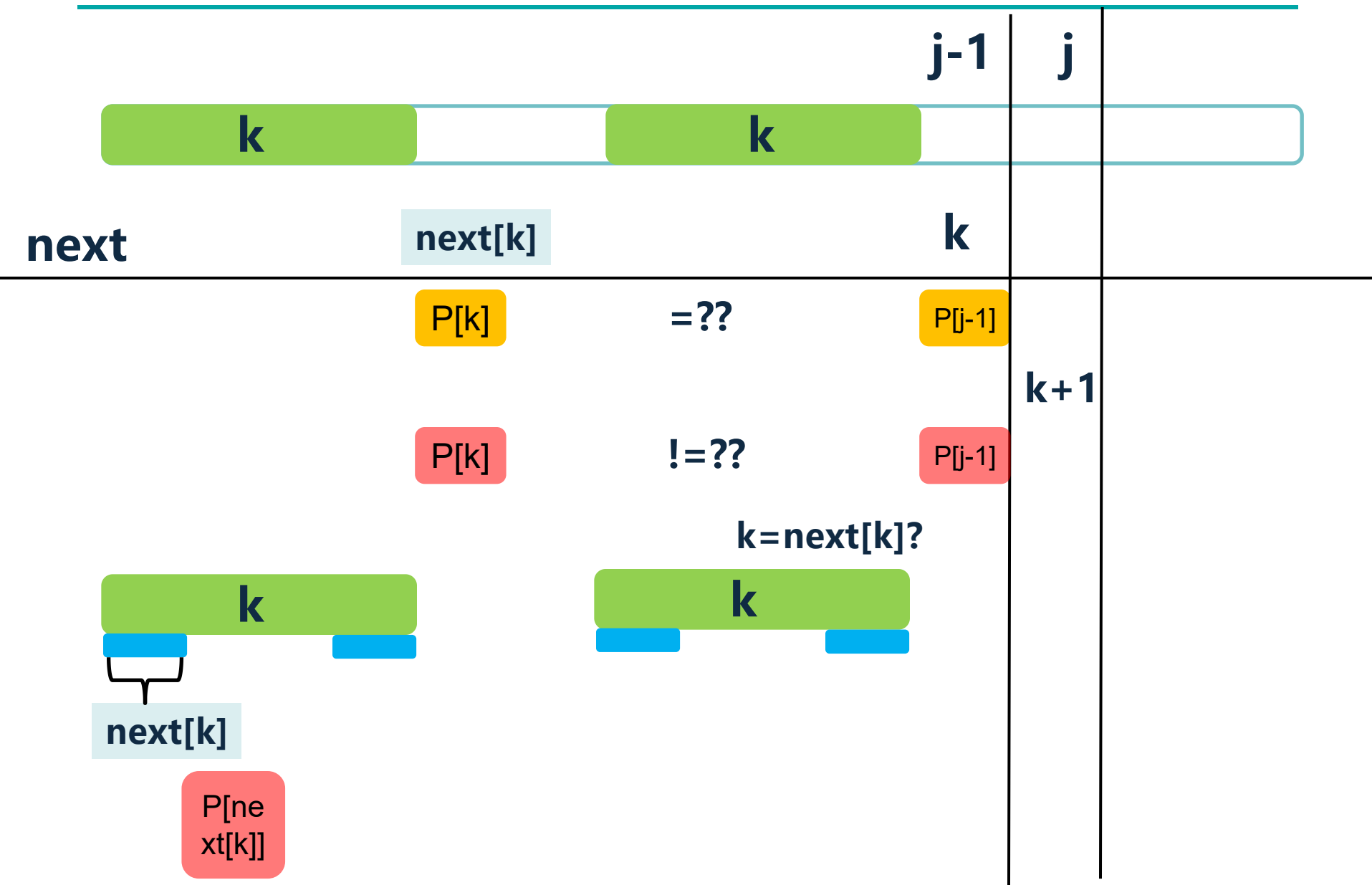
若 $P[j-1] == P[k]$:
最长候选可扩展,
 $\text{next}[j]=k+1$

若 $P[j-1] != P[k]$:
当前候选失败, 令 $k=\text{next}[k]$ 再试

k 沿着 **next** 链回退, 尝试更短但仍可能成立的相等前缀/后缀。

循环停止条件: 找到可匹配的 k , 或 k 回退到 -1 。

计算 next 数组



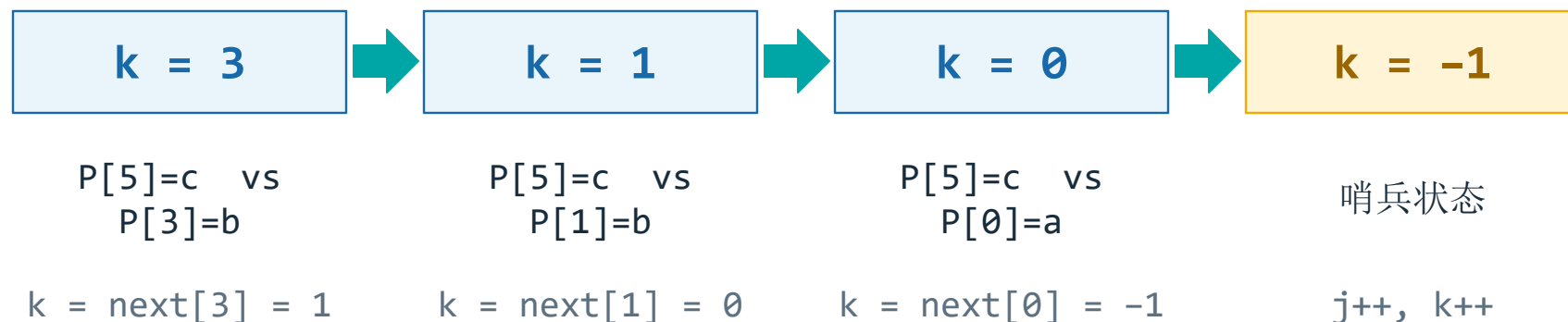
构造 next 时的回退链

08

计算 $\text{next}[6]$: 尝试把 $P[5] = c$ 接到已有边界之后

当前已知 $\text{next}[5] = 3$

a, b, a, b, a, c, a
[-1, 0, 0, 1, 2, 3, 0]



$\text{next}[6] = 0$

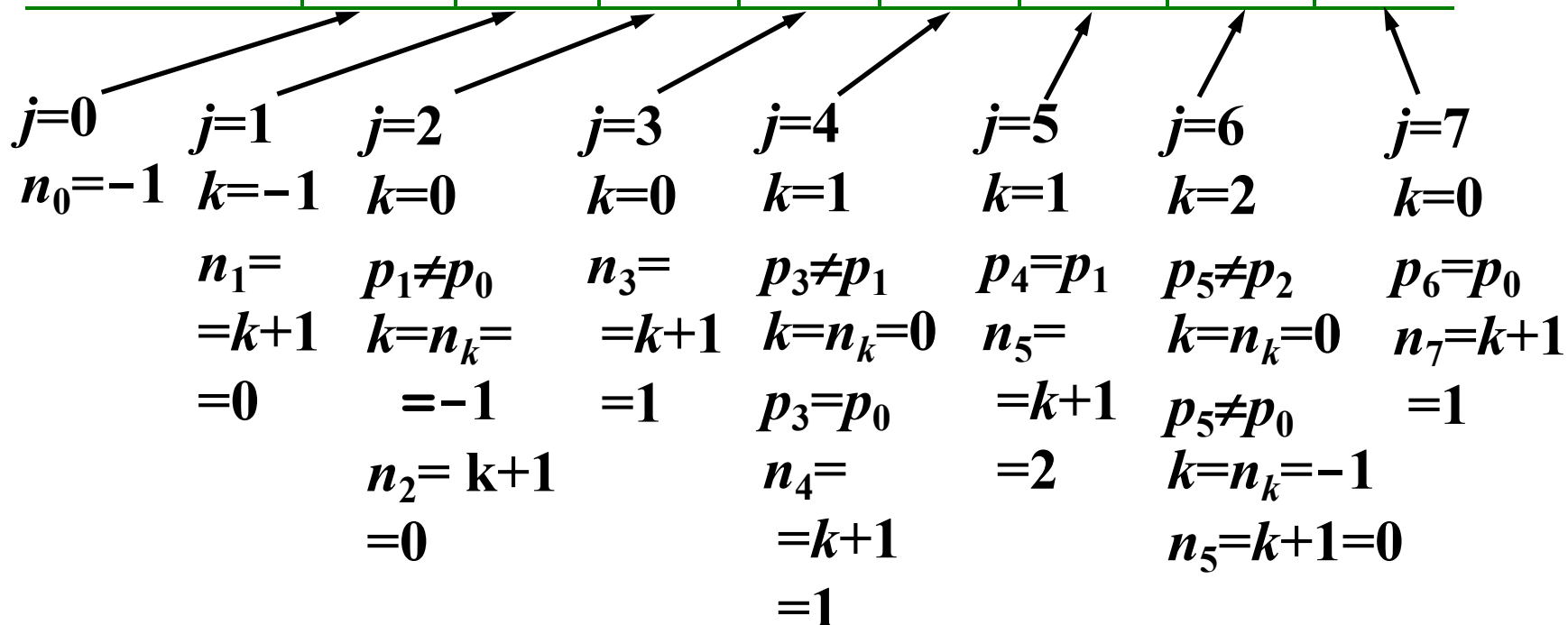
每次 $k = \text{next}[k]$ 都换成更短的边界候选, 字符不会被重复向前扫描

next特征向量的计算

- 设模式 $P = p_0 p_1 p_2 \dots p_{m-1}$ 由 m 个字符组成，而next特征向量为 $\text{next} = n_0 n_1 n_2 \dots n_{m-1}$ ，表示了模式的字符分布特征。
- next特征向量从0, 1, 2, ..., $m-1$ 逐项递推计算：
 - ① 当 $j = 0$ 时， $n_0 = -1$ 。设 $j > 0$ 时 $n_{j-1} = k$ ：
 - ② 当 $k == -1$ 或 ($j > 0$ 且 $p_{j-1} == p_k$)，则 $n_j = k+1$ 。（匹配则统一后移）
 - ③ 当 $p_{j-1} \neq p_k$ 且 $k \neq -1$ ，令 $k = n_k$ ，并让③循环直到条件不满足， $n_j = k+1$

- 以前面的例子说明：

j	0	1	2	3	4	5	6	7
P	a	b	a	a	b	c	a	c
next [j]	-1	0	0	1	1	2	0	1



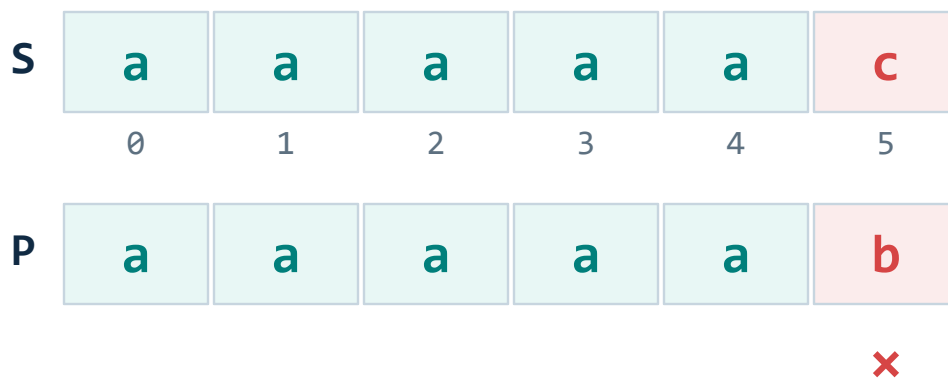
对当前串计算next特征向量的算法

```
void AString::getNext(int next[]) {  
    int j = 0, k = -1, lengthP = curLength;  
    next[0] = -1; j = 1;  
    while (j < lengthP) {                                //计算next[j]  
        k = next[j-1];  
        while(1) {  
            if ( k == -1 || ch[j-1] == ch[k]) {  
                k++;  
                next[j] = k;  
                j++;  
                break;  
            }  
            else k = next[k];  
        }  
    }  
};
```

普通 next 的无效回退

11

$S = \text{aaaaac}$, $P = \text{aaaaab}$, $\text{next} = [-1, 0, 1, 2, 3, 4]$



失配后的 j 回退过程



$j = 5$ 回到 4 有必要；随后 $P[4]$ 、 $P[3]$ 、 $P[2]$ 、 $P[1]$ 、 $P[0]$ 都是 a

同一个文本字符 c 会与 a 重复比较 5 次

nextval 的优化规则

12

当 $P[j]$ 与 $P[\text{next}[j]]$ 相同，下一次比较必然再次失配

$P[j] \neq P[\text{next}[j]]$
 $\text{nextval}[j] = \text{next}[j]$

$P[j] = P[\text{next}[j]]$
 $\text{nextval}[j] = \text{nextval}[\text{next}[j]]$

j	0	1	2	3	4	5
P[j]	a	a	a	a	a	b
next[j]	-1	0	1	2	3	4
判断	初值	$a = a$	$a = a$	$a = a$	$a = a$	$b \neq a$
nextval[j]	-1	-1	-1	-1	-1	4

$P = \text{aaaaab}$ 的 $\text{nextval} = [-1, -1, -1, -1, -1, 4]$

nextval 构造代码与效果

13

```
vector<int> buildNextval(const string& p) {  
    vector<int> nextval(p.size(), -1);  
    int j = 0, k = -1;  
  
    while (j < (int)p.size() - 1) {  
        if (k == -1 || p[j] == p[k]) {  
            ++j;  
            ++k;  
            nextval[j] = (p[j] != p[k])  
                ? k : nextval[k];  
        } else {  
            k = nextval[k];  
        }  
    }  
    return nextval;  
}
```

S = aaaaac, P = aaaaab

普通 next



nextval



失配阶段比较次数
6 次降为 2 次

主匹配循环不变，只需把跳转
数组换成 nextval

1. 目标串 `T="aaaaab"`, 模式串 `P="aaab"`. 朴素匹配从位置 0 开始, 求首次匹配位置和字符比较总次数。
2. 采用课件约定 $\text{next}[0] = -1$, 且模式位置 `j` 失配后令 $j = \text{next}[j]$. 求模式串 `P="aabaaab"` 的 `next` 数组。
3. 目标串 `T="cabaabaabc"`, 模式串 `P="aaba"`. 使用 `next[0] = -1` 版本 KMP, 求首次匹配位置, 并说明目标串指针是否回退。
4. 两位同学为同一模式串写出了不同的 `next` 数组。能否立即判断其中一人错误? 应检查哪些内容?

1. 目标串 `T="aaaaab"`, 模式串 `P="aaab"`. 朴素匹配从位置 0 开始, 求首次匹配位置和字符比较总次数。

答案: 起点 0 和 1 都在第 4 个字符失配, 各比较 4 次; 起点 2 比较 4 次后成功。首次匹配位置为 2, 共比较 12 次。

2. 采用课件约定 $next[0]=-1$, 且模式位置 j 失配后令 $j=next[j]$ 。求模式串 `P="aabaaab"` 的 `next` 数组。

答案: $next=[-1,0,1,0,1,2,2]$ 。

3. 目标串 `T="cabaabaabc"`, 模式串 `P="aaba"`. 使用 $next[0]=-1$ 版本 KMP, 求首次匹配位置, 并说明目标串指针是否回退。

答案: 首次匹配位置为 3, 对应 $T[3..6]="aaba"$ 。目标串指针不回退; 失配时只根据 `next` 修改模式串指针。

4. 两位同学为同一模式串写出了不同的 `next` 数组。能否立即判断其中一人错误? 应检查哪些内容?

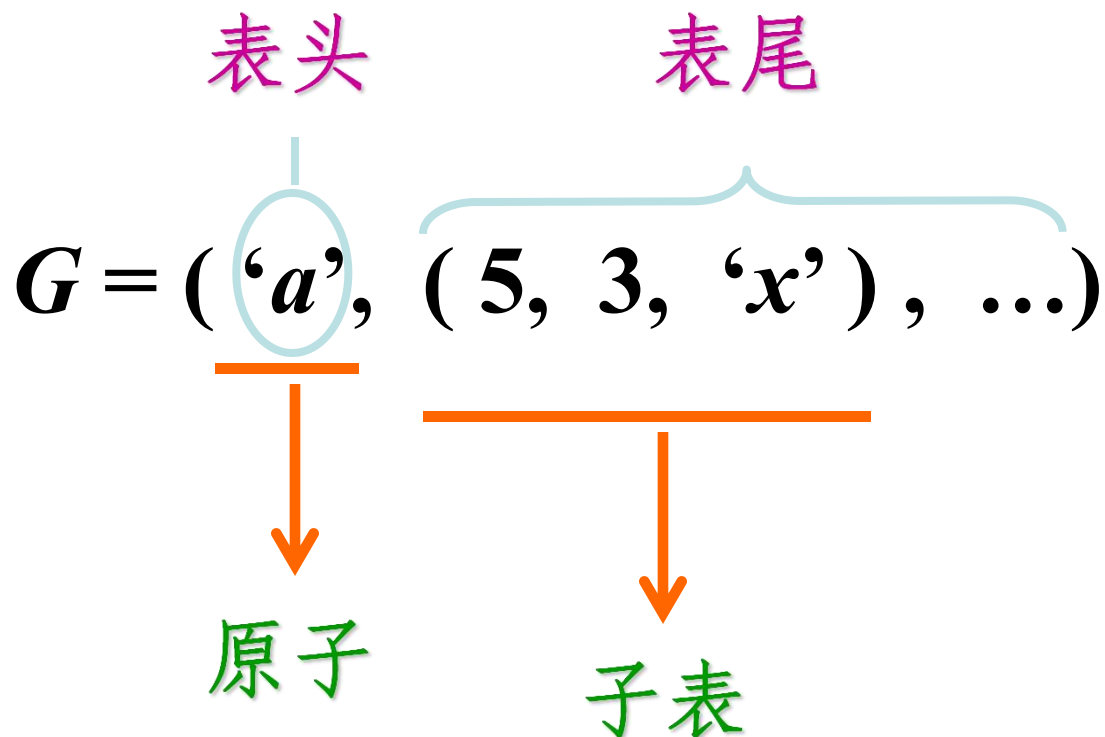
答案: 不能立即判断。不同教材可能采用 $next[0]=-1$ 、前缀函数、整体右移或 `nextval` 等定义。应检查数组的精确定义、下标起点、失配后的跳转语句和成功条件是否彼此配套。

广义表 (General Lists)

- 广义表是 $n (\geq 0)$ 个表元素组成的有限序列，记作

$$LS(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

- LS 是表名， a_i 是表元素，可以是表（称为子表），可以是数据元素（称为原子）。
- n 为表的长度。 $n = 0$ 的广义表为空表。



• $n > 0$ 时，表的第一个表元素称为广义表的表头（**head**），除此之外，其它表元素组成的表称为广义表的表尾（**tail**）。

广义表的特性

- 有次序性
- 有深度
- 可递归
- 有长度
- 可共享

A()

A长度为0，深度为1

B(6, 2)

B长度为2，深度为1

C('a', (5, 3, 'x'))

C长度为2，深度为2

D(B, C, A)

D长度为3，深度为3

E(B, D)

E长度为？ 深度为？

F(4, F)

F长度为？ 深度为？

广义表的表头与表尾

- 广义表的第一个表元素即为该表的表头，除表头元素外其他表元素组成的表即为该表的表尾。

A() **head(A) 和 tail(A) 不存在**

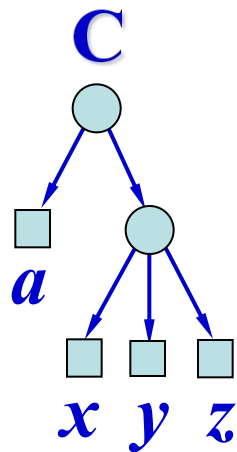
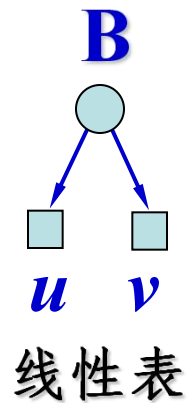
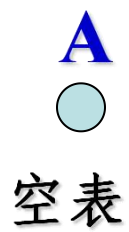
B(6, 2) **head(B) = 6, tail(B) = (2)**

C('a', (5, 3, 'x')) **head(C) = 'a'**

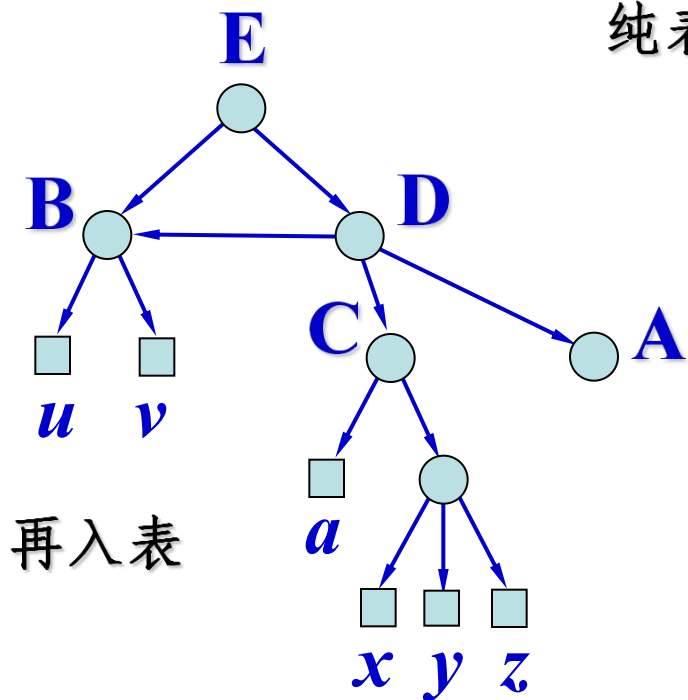
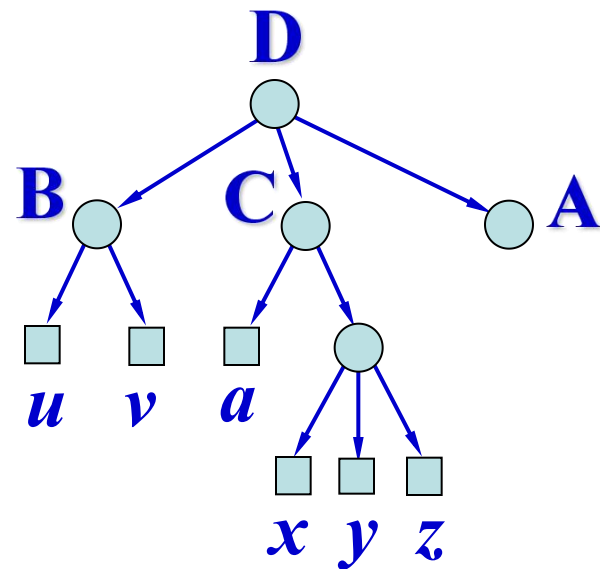
D(B, C, A) **tail(C) = ((5,3, 'x'))**

E(B, D) **head(((5,3, 'x'))) = (5,3, 'x')**

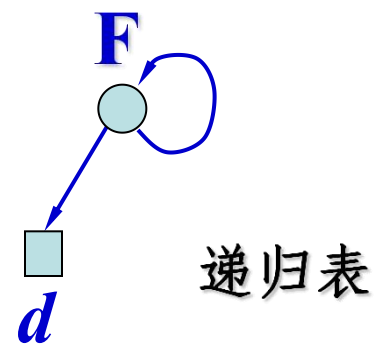
F(4, F) **tail(((5,3, 'x'))) = ()**



纯表 (树)

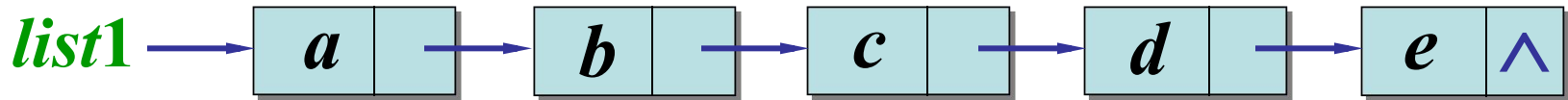


再入表

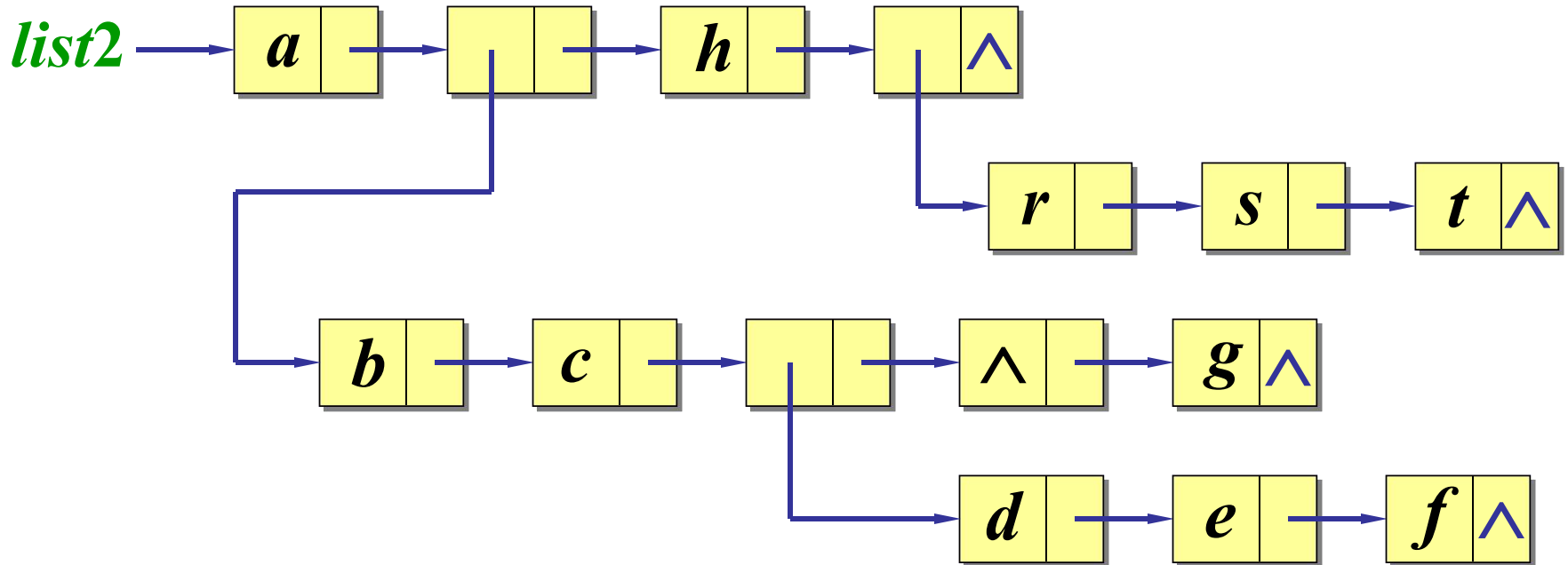


递归表

广义表的表示



$list1 = (a, b, c, d, e)$



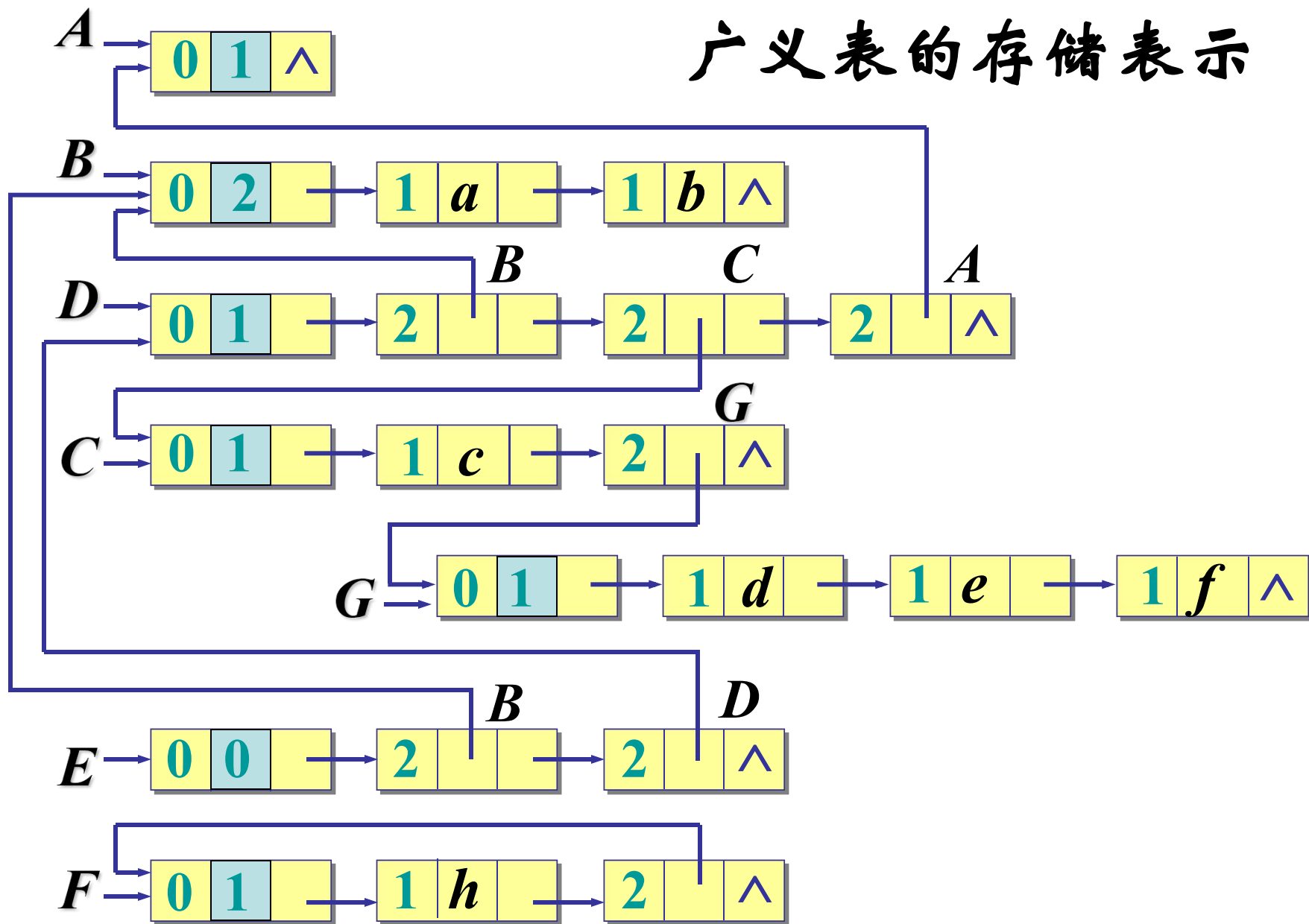
$list2 = (a, (b, c, (d, e, f), \wedge), g), h, (r, s, t))$

广义表结点定义

utype	info	tlink
-------	------	-------

- 结点类型 **utype**: = 0, 表头; = 1, 原子数据;
= 2, 子表
- 信息**info**: **utype** = 0时, 存放引用计数(ref);
utype = 1时, 存放数据值(value); **utype** = 2
时, 存放指向子表表头的指针(hlink)
- 尾指针**tlink**: **utype** = 0时, 指向该表第一个
结点; **utype** ≠ 0时, 指向同一层下一个结点

广义表的存储表示



广义表的类定义

```
template <class T>
struct GenListNode {           //广义表结点类定义
    int utype;                 // = 0 / 1 / 2
    GenListNode<T> *tlink;     //同层下一结点指针
    union {                   //等价变量
        int ref;              //存放引用计数
        T value;              //存放数值
        GenListNode<T> *hlink; //存放子表指针
    } info;
    GenListNode()              //构造函数
        : utype(0), tlink(NULL), info.ref(0) {}
    GenListNode(GenListNode<T>& R) {
        //复制构造函数
        utype = R.utype;  tlink = R.tlink;
        info = R.info;
    }
};
```

```

template <class T>
class GenList {                                //广义表类定义
    public:
        Genlist();                            //构造函数
        ~GenList();                          //析构函数
        bool Head (GenListNode<T>& x); //x 返回表头元素
        bool Tail (GenList<T>& lt);      //lt 返回表尾
        GenListNode<T> *First(); //返回第一个元素地址
        GenListNode<T> *Next (GenListNode<T> *elem);
            //返回表元素elem的直接后继元素
        void Copy ( const GenList<T>& R);
            //广义表的复制
        int Length();                        //计算广义表长度
        int Depth();                        //计算非递归表深度

```

private:

```
    GenListNode<T> *first;    //广义表头指针
    GenListNode<T> *Copy (GenListNode<T> *ls);
    //复制一个ls指示的无共享非递归表
    int Length (GenListNode<T> *ls);
    //求由ls指示的广义表的长度
    int Depth (GenListNode<T> *ls);
    //计算由ls指示的非递归表的深度
    bool Equal (GenListNode<T> *s,
                GenListNode<T> *t);
    //判以s和t为表头的两个表是否相等
    void Remove (GenListNode<T> *ls);
    //释放以ls为附加头结点的广义表
```

```
void CreateList (istream &in, GenListNode<T> *&  
ls, SeqList<T>& L1, SeqList <GenListNode<T> *>&  
L2);
```

```
    //从输入流对象输入广义表的字符串描述,  
    //建立一个带头结点的广义表结构
```

```
friend istream& operator >> (istream& in,  
    GenList<T>& L);  
};
```

广义表类的构造和访问成员函数

```
template <class T>
Genlist<T>::GenList() {                                //构造函数
    GenListNode<T> * first = new GenListNode;
    if (first == NULL) { cerr << “存储分配失败! \n”; exit(1); }
};

template <class T>
bool GenList<T>::Head (GenListNode <T>& x) {
//若广义表非空， 则通过x返回其第一个元素的值
//否则函数没有定义
    if (first->tlink == NULL) return false;    //空表
    else {                                       //非空表
        x.utype = first->tlink->utype;
        x.info = first->tlink->info;
        return true;                           //x返回表头的值
    }
};
```

```

template <class T>
bool GenList<T>::Tail(GenList<T>& lt) {
//若广义表非空， 则通过lt返回广义表除表头元素
//以外其他元素组成的表， 否则函数没有定义
    if (first->tlink == NULL) return false;      //空表
    else {                                          //非空表
        lt.first->utype = 0;                        //设置头结点
        lt.first->info.ref = 0;
        lt.first->tlink = Copy(first->tlink->tlink);
        return true;
    }
};

```

```

template <class T>
GenListNode<T> *GenList<T>::First() {
//返回广义表的第一个元素（若表空，则返回一个
//特定的空值NULL）
    if (first->tlink == NULL) return NULL; //空表
    else return first->tlink; //非空表
};

```

```
template <class T>  
GenListNode<T> *GenList<T>::  
Next(GenListNode<T> *elem) {  
//返回表元素elem的直接后继元素  
    if (elem->tlink == NULL) return NULL;  
    else return elem->tlink;  
};
```

广义表的递归算法

- 一个递归算法有两种：一个是递归函数的外部调用；另一个是递归函数的内部调用。
- 通常，把外部调用设置为公有函数，把内部调用设置为私有函数。

广义表的复制算法

```
template <class T>                //公有函数
void GenList<T>::Copy(const GenList<T>& R)
    first = Copy(R.first);        //调用私有函数
};
```

```

template <class T>                                //私有函数
GenListNode<T>* GenList<T>::Copy(GenListNode <T> *ls) {
    //复制一个 ls 指示的无共享子表的非递归表
    GenListNode<T> *q = NULL;
    if (ls != NULL) {
        q = new GenListNode<T>; //处理当前的结点q
        q->utype = ls->utype; //复制结点类型
        switch (ls->utype) { //根据utype传送信息
            case 0: q->info.ref = ls->info.ref; break;
            case 1: q->info.value = ls->info.value; break;
            case 2: q->info.hlink = Copy(ls->info.hlink);
                break;
        }
        q->tlink = Copy(ls->tlink); //处理同层下一结点
    }
    return q;
};

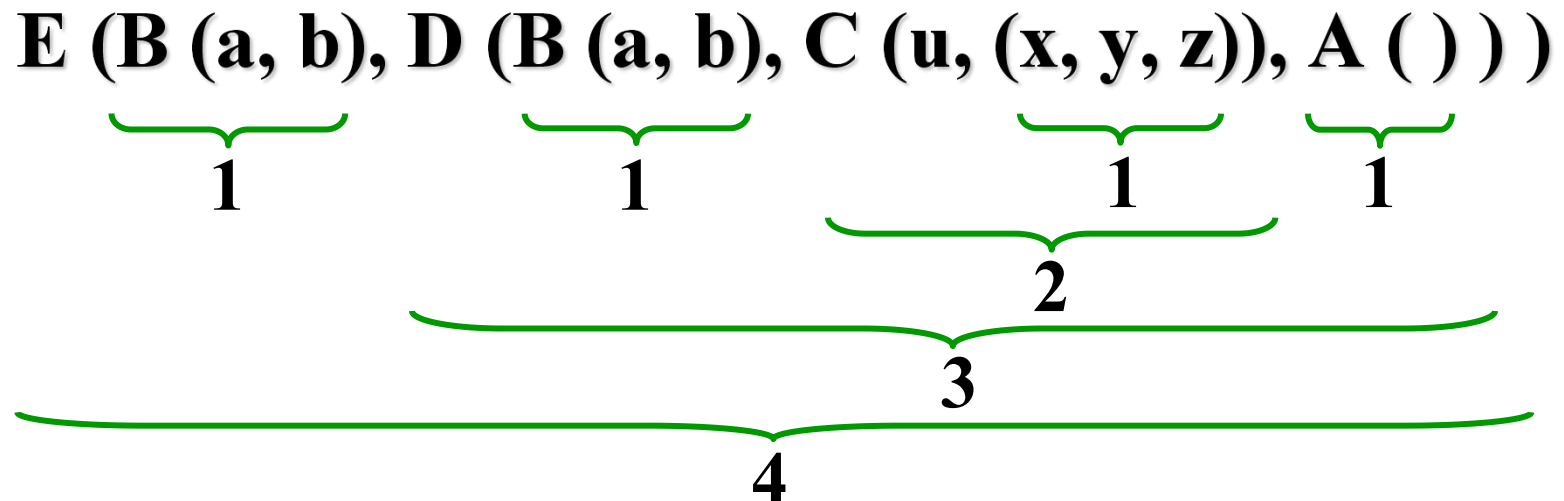
```



求广义表深度的算法

$$\text{Depth}(\text{LS}) = \begin{cases} 1, & \text{当LS为空表时} \\ 0, & \text{当LS为原子时} \\ 1 + \max_{0 \leq i \leq n-1} \{\text{Depth}(\alpha_i)\}, & \text{其他, } n \geq 1 \end{cases}$$

- 例如，对于广义表



```
template <class T>  
int GenList<T>::Depth() {           //公有函数  
//计算一个非递归表的深度  
    return Depth(first);  
};
```

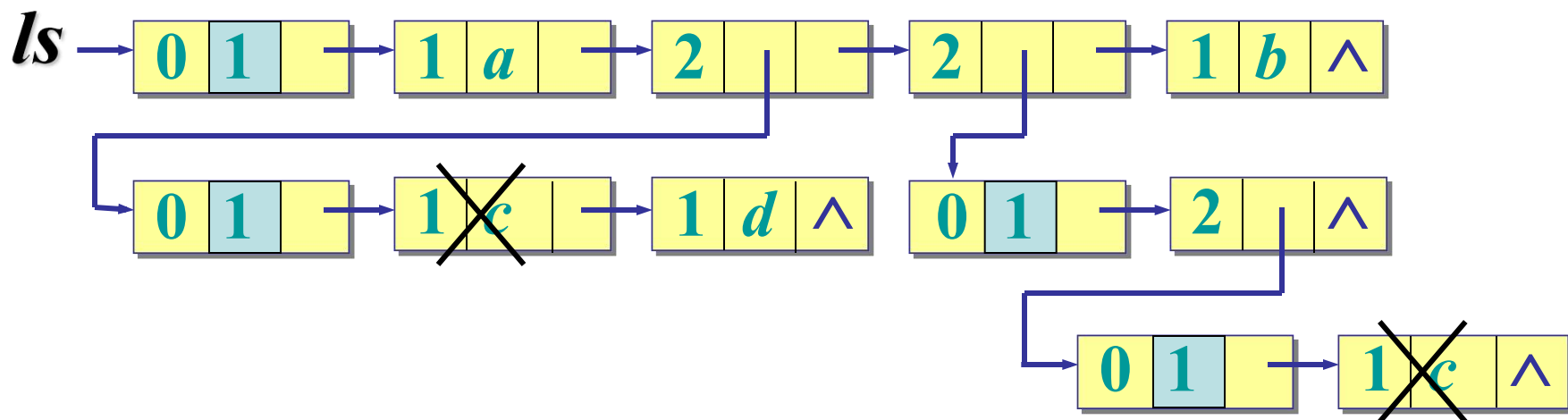
```
template <class T>                 //私有函数  
int GenList<T>::Depth(GenListNode<T> *ls) {  
    if (ls->tlink == NULL) return 1;  
    // ls->tlink ==NULL, 空表, 深度为1  
    GenListNode<T> *temp = ls->tlink;  
    int m = 0, n;
```

```

while (temp != NULL) {      //在广义表顶层横扫
    if (temp->utype == 2) {   //扫描到表结点
        n = Depth(temp->info.hlink);
        //递归计算以子表深度
        if (m < n) m = n;    //取最大深度
    }
    temp = temp->tlink;
}
return m+1;                //返回深度
};

```

广义表的删除算法



扫描子链表

- ◆ 若结点数据为 c , 删除。可能做循环连续删。
- ◆ 若结点数据不为 c , 不执行删除。
- ◆ 若结点为子表, 递归在子表执行删除。

```
template <class T>
```

```
void delvalue(GenListNode<T> *ls, T x) {
```

```
    if (ls->tlink != NULL) {                                //非空表
```

```
        GenListNode<T> * p = ls->tlink; //第一个结点
```

```
        while (p != NULL && (p->utype == 1 &&
```

```
            p->info.value == x)) {
```

```
            ls->tlink = p->tlink; delete p;
```

```
            p = ls->tlink;                //p指向同层下一结点
```

```
        }
```

```
    if (p != NULL) {
```

```
        if (p->utype == 2)    //递归在子表中删除
```

```
            delvalue(p->info.hlink, x);
```

```
            delvalue(p, x);
```

```
            //在以p为表头的链表中递归删除
```

```
        }
```

```
    }
```

```
};
```

- 删除子表:

- 对于共享表来说, 如果一个表元素有多个地方使用它, 贸然删去它会造成其他地方使用出错。因此, 当要做删除时, 先把该表的头结点中的引用计数 **ref** 减1, 当引用计数减到 **0** 时才能执行结点的真正释放。

```
template <class T>
```

```
GenList<T>::~~GenList() {
```

```
//广义表的析构函数, 每个头结点都有引用计数
```

```
    Remove(first);
```

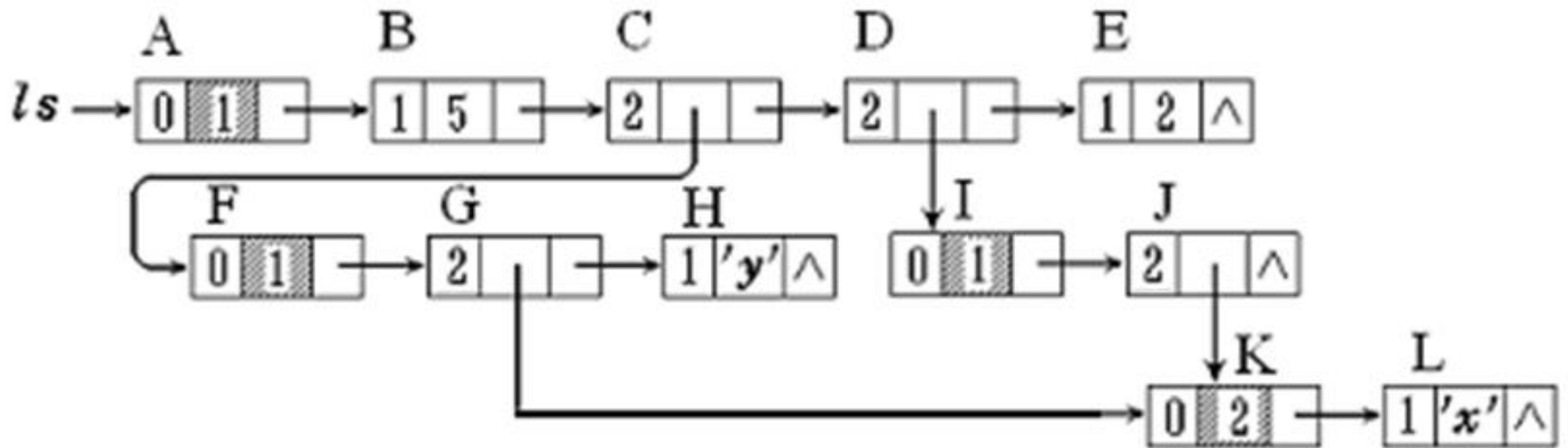
```
};
```

```

template <class T>
void GenList<T>::Remove(GenListNode<T> *ls) {
//私有函数：释放以ls为表头指针的广义表
    ls->info.ref--;           //头结点的引用计数减1
    if (ls->info.ref <= 0) {   //如果减到0
        GenListNode<T> *q;
        while (ls->tlink != NULL) { //横扫表顶层
            q = ls->tlink;           //到第一个结点
            if (q->utype == 2) {     //递归删除子表
                Remove(q->info.hlink);
                if (q->info.hlink->info.ref <= 0)
                    delete q->info.hlink; //删子表头结点
            }
            ls->tlink = q->tlink; delete q;
        }
    }
};

```

- 例：给出下面的广义表进行删除时的结点删除的顺序



建立广义表的链表表示

设广义表的字符串描述如下

$S(A ('b', 'c'), B('#'), 'd');$

据字符串描述生成广义表链表结构

- 假设一个广义表的元素类型 **T** 是字符类型 **char**，每一个原子元素的值为英文字母，并假定广义表从输入流对象 **istream** 输入。
- 在算法的执行过程中，检测从输入流对象输入的一个字符，如果遇到表名（用大写字母表示），首先检查这个表名是否已经存在，如果是，说明该表是共享表，只要将相应头结点的引用计数加一即可；如果不是，保存该表名并建立相应广义表。表名后面一定是左括号 ‘(’，不是则输入错，是则递归建立广义表结构。

- 如果遇到用小写字母表示的原子，则建立原子结点；如果遇到右括号 ‘)’，子表链收尾并退出递归。
- 注意在空表情形括号里应夹入一个非英文字母，如字符‘#’，不能一个字符也没有。整个广义表描述字符串以‘;’结束。

由字符串建立广义表的链表表示算法

```
#include <string.h>
```

```
template <class T>
```

```
void Genlist<T>::CreateList(istream &in,  
    GenListNode<T> *& ls, SeqList<T>& L1,  
    SeqList <GenListNode<T> *>& L2) {
```

```
//从广义表的字符串描述 s 出发, 建立一个带头结  
//点的广义表, 要求T为char类型。在表L1存储大  
//写字母的表名, 在表L2存储表名对应子表结点的  
//地址。
```

```
    T chr;
```

```
    in >> chr;
```

```

//读入一个字符，只可能读入#、左括号和字母
if (isalpha(chr) && isupper(chr) || chr == '(') {
//大写字母或'('
    ls = new GenListNode<T>;           //建子表结点
    ls->utype = 2;
    if (isalpha(chr) && isupper(chr)) { //表名处理
        int n = L1.Length();
        int m = L1.Search(chr);
        if (m != 0) {                  //该表已建立
            GenListNode<T> *p = L2.Locate(m);
            //查子表地址
            ls->info.hlink = p;
            p->ref++;                  //引用计数加一
            CreateList(in, ls->tlink, L1, L2);
            //递归建后继表
        }
    }
}

```

```

else { //该表未建立
    L1.Insert(n, chr); L2.Insert(n, ls);
    //保存表名及地址
    in >> chr;
    if (chr != '(') exit(1); //表名后必跟'('
    ls->info.hlink = new GenListNode<T>;
    ls->info.hlink->utype = 0; //建头结点
    ls->info.hlink->ref = 1;
    CreateList(in, ls->info.hlink->tlink, L1,
L2);
    //递归建子表
}

```

```

}
else if (isalpha(chr) && islower(chr)) {
    //建原子结点
    ls = new GenListNode<T>;
    ls->utype = 1; ls->info.value = chr;
    CreateList(in, ls, L1, L2);
}
else if (chr == ',')                //建后继结点
    CreateList(in, ls->tlink, L1, L2);
else if (chr == ')') ls->tlink = NULL; //链收尾
else if (chr == '#') ls == NULL;      //空表, 链收尾
};

```

- 该算法需要扫描输入广义表中的所有字符，且处理每个字符都是简单比较或赋值操作，其时间复杂度为 $O(1)$ ，所以整个算法的时间复杂度为 $O(n)$ ， n 是广义表中所有字符数。
- 算法中既包含向子表的递归调用，也包含向后继表的递归调用，所以递归调用的最大深度不会超过生成的广义表中所有结点数，其空间复杂度也为 $O(n)$ 。

```

template <class T>
istream& operator >> (istream& in, GenList<T>& L)
{
    int n;
    cout << “输入广义表串的字符个数： ” << endl;
    in >> n;
    SeqList<T> Ls1(n);
    SeqList <GenListNode<T> *> Ls2 (n);
    CreateList (in, L.first, Ls1, Ls2); //建立存储结构
};

```

1. 约定“空表深度为 1”，设 $G=(p,(q,r),(),((s)))$ 求 `G` 的长度、深度、表头和表尾。

2. 设 $L=((a,b),c,(d))$ 。求 `head(L)`、`tail(L)` 和 `head(tail(L))`。

3. 广义表复制算法中，遇到子表结点时要递归复制 `hlink`，每个结点还要递归复制 `tlink`。为什么两个递归调用都需要？

1. 约定“空表深度为 1”，设 $G = (p, (q, r), (), ((s)))$ 求 `G` 的长度、深度、表头和表尾。

答案：顶层有 4 个元素，所以长度为 4。子表 `(q,r)` 深度为 1，空表深度为 1，`((s))` 深度为 2，因此 `G` 深度为 `1+2=3`。表头为原子 `p`，表尾为 `(q,r),(),((s))`。

2. 设 $L = ((a,b), c, (d))$ 。求 `head(L)`、`tail(L)` 和 `head(tail(L))`。

答案： `head(L) = (a,b)`，`tail(L) = (c, (d))`，`head(tail(L)) = c`。

3. 广义表复制算法中，遇到子表结点时要递归复制 `hlink`，每个结点还要递归复制 `tlink`。为什么两个递归调用都需要？

答案： `hlink` 进入当前元素代表的子表，覆盖纵向嵌套结构；`tlink` 移到同一层的后继元素，覆盖横向序列。少任意一个都会漏掉一部分结构。

3. 子表 `H` 的头结点引用计数为 3。依次删除三个指向 `H` 的外部引用，每次删除后 `ref` 是多少？何时可以真正释放 `H`？

4. 设广义表 `L=(x,(x,y),x,x,z)`。递归删除所有原子 `x` 后，结果是什么？

5. 分别为以下需求选择合适的表示或算法，并给出一个关键理由。

1. 阶数很高、数值关于主对角线对称且基本不修改的矩阵
2. 非零项经常变化，并需按行和按列遍历的稀疏矩阵
3. 在很多长文本中反复搜索同一个模式串
4. 含嵌套和共享子结构的数据

3. 子表 `H` 的头结点引用计数为 3。依次删除三个指向 `H` 的外部引用，每次删除后 `ref` 是多少？何时可以真正释放 `H`？

答案：三次删除后依次为 2、1、0。前两次仍有其他引用，不能释放；第三次降到 0 后才可递归释放 `H`。若结构存在循环引用，仅靠引用计数仍可能无法回收。

4. 设广义表 `L=(x,(x,y),x,x,z)`。递归删除所有原子 `x` 后，结果是什么？

答案： $L=((y),z)$ 。顶层的三个 `x` 被删除，子表 `(x,y)` 中的 `x` 也被删除，但子表本身仍保留为 `(y)`。

5. 分别为以下需求选择合适的表示或算法，并给出一个关键理由。

1. 阶数很高、数值关于主对角线对称且基本不修改的矩阵
2. 非零项经常变化，并需按行和按列遍历的稀疏矩阵
3. 在很多长文本中反复搜索同一个模式串
4. 含嵌套和共享子结构的数据

答案：

1. 三角压缩的一维数组，只存一半元素并通过对称性访问另一半。
2. 正交链表，同时支持行列遍历和局部插删。
3. KMP，模式串的 `next` 可预处理并重复使用，目标指针不回退。
4. 带类型标记、`tlink`、`hlink` 和引用计数的广义表表示；若允许循环，还需额外的垃圾回收策略。